MATEMATIKA 10

I DALIS



LEIDĖJŲ ŽODIS

Mieli dešimtokai,
šį vadovėlį autorių kolektyvas rengė nuolat prisimindamas, kad po metų jūsų laukia nelengvas pasirinkimas, ko ir kaip toliau mokytis. Pagrindinės mokyklos programoje numatytą medžiagą buvo stengtasi papildyti teiginiais, uždaviniais, o kai kada net atskirais skyreliais, kurie būtų naudingi moksleiviams, planuojantiems pasirinkti realinį profilį arba tiesiog norintiems žinoti daugiau.
Vadovėlis susideda iš dviejų dalių (I dalis — 1–7 skyriai, II dalis — 8 skyrius ir medžiaga, skirta kursui pakartoti). Kad jūs galėtumėte dirbti savarankiškai, teorinė dalis yra platesnė, pateikta daugiau išspręstų pavyzdžių, bet mažiau pratimų ir užduočių. Kaip įprasta, sunkesnių užduočių numeriai pažymėti žvaigždute. Kam uždavinių bus per mažai, atskira knygute yra išleistas uždavinynas. Kiekvienoje vadovėlio dalyje pratimai ir užduotys numeruojami iš eilės, išskyrus skyrelius „Pasitikrinkite", kurių uždaviniai numeruojami atskirai kiekviename skyriuje, o jų atsakymai pateikti kiekvienos dalies gale. Teorijos skyreliuose nuspalvintas klaustukas žymi klausimus, į kuriuos turėtų atsakyti patys mokiniai. Pilkame fone pateikta neprivaloma teorinė medžiaga, skirta temos pagilinimui. Uždaviniai, atitinkantys papildomą medžiagą, yra nuspalvinti, o papildomi sunkesnieji uždaviniai dar pažymėti spalvota žvaigždute. Siekiant atkreipti jūsų dėmesį, kai kurie apibendrinantys teiginiai ir formulės spalvotai įrėminti.
Šį vadovėlį kūrė ne tik autorių kolektyvas, bet ir leidyklos specialistai, konsultantai, eksperimentuojantys mokytojai. Nuoširdžiai dėkojame visiems, prisidėjusiems rengiant vadovėlį.
Prašome savo pastabas, pageidavimus ir pasiūlymus siųsti adresu:
Leidykla TEV, Akademijos g. 4, LT-2600 Vilnius.

Vadovėlį rengė autorių kolektyvas:

Irena Bagdonienė*, *Jolanta Knyvienė*, *Aleksandras Plikusas*, *Kazimieras Pulmonas*, *Juozas Šinkūnas.

Su eksperimentiniu vadovėliu dirbo mokytojai: *R. Biekšienė, V. Bartkuvienė, K. Intienė, L. Jakštienė, V. Jankevičienė, R. Jonaitienė, A. Karmanova, S. Kavaliūnienė, R. Klasauskienė, N. Kriaučiūnienė, R. Kučiauskienė, D. Matienė, G. Mikalauskienė, L. Papuškienė, V. Sičiūnienė, S. Staknienė, V. Stoškuvienė, A. Šverienė, A. Ūsienė, V. Viniautienė, A. Žiulpa.*

MATEMATIKA 10

I DALIS

TEV

VILNIUS 2002

UDK 51(075.3)
Ma615

Lietuvos Respublikos švietimo ir mokslo ministerijos rekomenduota 2001 02 06 Nr. 74

Antrasis pataisytas leidimas

Recenzavo Matematikos ir informatikos institutas

Darbo vadovas *Valdas Vanagas*

Redaktoriai: *Juozas Mačys, Žydrūnė Stundžienė*

Programinė įranga: *Tadeuš Šeibak, Rolandas Jakštys*

Kompiuterinė grafika: *Edita Tatarinavičiūtė, Daiva Sniečkutė*

Teksto kompiuterinis rinkimas ir maketavimas: *Nijolė Drazdauskienė, Aldona Žalienė*

Gamybos vadovas *Algimantas Paškevičius*

Kalbos redaktorė *Diana Gustienė*

Konsultantai: *Marytė Stričkienė, Elmundas Žalys*

Leidyklos TEV interneto svetainė www.tev.lt

ISBN 9955–491–04–3 (1 dalis)
ISBN 9955–491–05–1 (2 dalys)

TURINYS

Nacionalinis biudžetas 6

Mokesčiai. Akcizas 9

Draudimas 12

1 Sudėtiniai procentai 15

2 Funkcijų grafikai 35

3 Lygčių ir nelygybių sistemos 65

4 Kvadratinės nelygybės 81

5 Kombinatorika ir tikimybės 105

6 Smailiojo kampo trigonometrinės funkcijos 133

7 Trikampių sprendimas 167

Skyrelių „Pasitikrinkite“ uždavinių atsakymai 198

Trigonometrinių funkcijų reikšmių lentelė 207

Nacionalinis biudžetas

Kaip žmonės ar šeimos sudarinėja savo biudžetus, taip Vyriausybė kiekvieniems metams parengia *nacionalinį šalies biudžetą*. Jame numatomos būsimųjų metų *pajamos* ir *išlaidos*.

Iš kur pajamų gauna žmonės, jau žinome: atlyginimai, palūkanos, pardavimai, laimėjimai, ... Kur pinigus išleisti, žino kiekvienas: būstas, maistas, pirkiniai, mokesčiai, ... Dar šiokios tokios nenumatytos išlaidos — ir biudžetas deficitinis...

 Kada biudžetas yra subalansuotas? perteklinis? deficitinis?

O kaip atrodo nacionalinis biudžetas?

Pirmiausia — pajamos. Jos daugiausiai susidaro iš mokesčių. Mokesčius moka visi šalies piliečiai, moka firmos ir įmonės, gamintojai ir paslaugų teikėjai, importuotojai ir eksportuotojai, moka pirkėjai ir pardavėjai. Be to, valstybė gauna ir nemokestinių pajamų: už suteiktą naudoti turtą, žemę, gamtos išteklius, už paskolas, renka baudas ir kitas rinkliavas už įvairių valstybės institucijų paslaugas. Šalies išlaidų yra labai daug ir įvairių: ekonomikai, socialinei sferai, kitoms valstybės funkcijoms. Visas jas sunku ir išvardyti...

Užduotis. Panagrinėkite kitame puslapyje pateiktą Lietuvos Respublikos 1999 metų nacionalinį biudžetą ir atsakykite į klausimus:

1. Kokios biudžeto pajamos; išlaidos litais? Užrašykite jas standartine skaičiaus išraiška.
2. Ar biudžetas perteklinis, ar deficitinis? Kokiu atveju biudžetas būtų subalansuotas?
3. Kiek procentų (tūkstantųjų tikslumu) visų biudžeto pajamų sudarė žemės mokestis; kiti mokesčiai?
4. Kuris iš jau nagrinėtų mokesčių sudaro didžiausią biudžeto pajamų dalį? Kiek tai sudaro procentų visų pajamų?
5. Kiek procentų (šimtųjų tikslumu) visų biudžeto išlaidų sudarė išlaidos socialinei apsaugai; švietimui?
6. Kiek procentų (dešimtųjų tikslumu) visų biudžeto išlaidų sudarė išlaidos butų ir komunaliniam ūkiui; viešajai tvarkai ir visuomenės apsaugai?

Lietuvos Respublikos 1999 metų nacionalinis biudžetas

	Tūkst. (Lt)		(%)
PAJAMOS	**8 983 600**		**100**
Mokestinės	**8 376 071**		93,24
Pajamų, pelno ir kapitalo mokesčiai:	2 937 222		
fizinių asmenų pelno mokestis		2 576 394	
juridinių asmenų pelno mokestis		360 828	
Turto mokesčiai:	246 606		
žemės mokestis		18 795	
žemės nuomos mokestis		47 452	
nekilnojamojo turto mokestis		178 210	
turto dovanojimo ir paveldėjimo mokestis		2149	
Vidaus prekių ir paslaugų mokesčiai:	4 784 873		
PVM		3 466 514	
akcizai		1 318 359	
Tarptautinės prekybos ir sandorių mokesčiai	192 611		
Kiti mokesčiai	214 759		
Nemokestinės	**607 529**		6,76
IŠLAIDOS	**9 108 723**		**100**
Ekonomikai:	**1 115 847**		12,25
butų ir komunaliniam ūkiui		273 762	
kuro ir energijos tiekimo paslaugoms		90 797	
žemės ūkiui, miškininkystei, žuvininkystei, veterinarijai		469 908	
mineralinių išteklių gavybai, pramonei ir statybai		38 920	
transportui ir ryšiams		166 265	
kitai ekonominei veiklai		76 195	
Socialinei sferai:	**4 769 066**		52,36
švietimui		2 787 578	
sveikatos apsaugai		562 157	
socialinei apsaugai		1 023 648	
sveikatingumui (sportui), rekreacijai, kultūrai		395 683	
Kitoms valstybės funkcijoms:	**3 223 810**		35,39
bendrosioms valstybės paslaugoms		760 955	
krašto apsaugai		494 274	
viešajai tvarkai ir visuomenės apsaugai		973 069	
kitos išlaidos		995 512	
PERTEKLIUS/DEFICITAS	−125 123		

Pratimai ir uždaviniai

1. Parašykite 1999 metų nacionalinio biudžeto išlaidas milijono tikslumu. Apskaičiuokite gautos apytikslės reikšmės:

a) absoliučiąją paklaidą; b) santykinę paklaidą procentais.

2. Parašykite 1999 metų nacionalinio biudžeto pajamas dešimties milijonų tikslumu. Apskaičiuokite gautos apytikslės reikšmės:

a) absoliučiąją paklaidą; b) santykinę paklaidą procentais.

3. Vienerių metų nacionalinio biudžeto mokestinės pajamos sudarė 5 471 955 tūkst. litų, o nemokestinės pajamos — 429 853 tūkst. litų. Kokios buvo tų metų nacionalinio biudžeto pajamos (litais)? Atsakymą parašykite:

a) šimtų tūkstančių tikslumu ir užrašykite standartine skaičiaus išraiška;
b) šimtų milijonų tikslumu ir užrašykite standartine skaičiaus išraiška.

4. Vienerių metų nacionalinio biudžeto mokestinės pajamos buvo 7 954 815 tūkst. litų didesnės už nemokestines pajamas, o tų metų visos pajamos sudarė 9 377 765 tūkst. litų.

a) Kokios buvo tų metų nacionalinio biudžeto mokestinės pajamos?
b) Kiek procentų (dešimtųjų tikslumu) tų metų biudžeto visų pajamų sudarė mokestinės pajamos?

5. Vienerių metų nacionalinio biudžeto mokestinės pajamos buvo 8 666 290 tūkst. litų, o tai apytiksliai sudarė 92,4% biudžeto visų pajamų.

a) Kokios buvo tų metų nacionalinio biudžeto pajamos?
b) Kiek litų sudarė tų metų nacionalinio biudžeto nemokestinės pajamos?

6. Remdamiesi Lietuvos Respublikos 1999 metų nacionalinio biudžeto duomenų lentele apskaičiuokite, kiek procentų (dešimtųjų tikslumu) visų pajamų sudarė:

a) fizinių asmenų pelno mokestis;
b) juridinių asmenų pelno mokestis;
c) nekilnojamojo turto mokestis.

7. Remdamiesi Lietuvos Respublikos 1999 metų nacionalinio biudžeto duomenų lentele apskaičiuokite, kiek procentų (dešimtųjų tikslumu) visų išlaidų socialinei sferai sudarė išlaidos:

a) švietimui;
b) sveikatos apsaugai;
c) socialinei apsaugai;
d) sveikatingumui (sportui), rekreacijai, kultūrai.

Nubraižykite nacionalinio biudžeto socialinės sferos išlaidų paskirstymo stulpelinę ir skritulinę diagramas.

Mokesčiai. Akcizas

Šiame pasaulyje neišvengsi tik dviejų dalykų — mokesčių ir mirties.
B. Franklinas (JAV politikas ir mokslininkas, 1706–1790)

Kaip matėme nagrinėdami nacionalinį biudžetą, didžiausiąją dalį pajamų sudaro šalies piliečių ir įmonių (fizinių ir juridinių asmenų) mokami *mokesčiai.* Mes jau nagrinėjome pajamų, Sodros, pelno, pridėtosios vertės mokesčius.

Akylesnis skaitytojas turbūt pastebėjo, kad Sodros mokesčio pajamos į nacionalinį biudžetą neįtrauktos — Valstybinio socialinio draudimo fondo ir Privalomojo sveikatos draudimo fondo biudžetai tvarkomi atskirai. Beje, jų dydis kartu lygus beveik dviem trečdaliams nacionalinio biudžeto dydžio.

Iš viso Lietuvoje yra daugiau kaip 20 įvairių mokesčių, kuriuos moka tiek gamintojai, tiek vartotojai.

O kodėl visi turi mokėti mokesčius, kokią naudą jie atneša savo šalies piliečiams, kiekvienam eiliniam žmogui?

Pirma, mokesčiai yra pagrindinis nacionalinio biudžeto pajamų šaltinis.

Antra, kai kurie mokesčiai saugo šalies gamintojus ir darbo vietas. Pavyzdžiui, *importo muito mokestis* saugo vieną ar kitą gamybos šaką nuo žlugimo dėl pigių prekių įvežimo iš užsienio. Beje, taip yra visose valstybėse.

Trečia, mokesčiais slopinama visuomenės dalies kai kuri žalinga veikla ar įpročiai (pavyzdžiui, akcizai rūkalams ar alkoholiui, padidinti mokesčiai už aplinką teršiančią gamybą ir pan.).

Ketvirta, mokesčių lengvatomis skatinama tam tikra naudinga šalies ekonomikai veikla (investicijos į įmonių modernizavimą, gamybos našumo didinimas, darbo vietų sukūrimas, labdara ir kt.).

Penkta, mokesčių tarifų keitimu valdoma šalies ekonomika (remiamos besivystančios ar gyvybiškai būtinos šaliai gamybos šakos, skatinamas eksportas, ribojama perteklinė produkcija).

Vienas iš svarbiausių mūsų dar nenagrinėtų mokesčių yra *akcizo* mokestis. Jo mokėtojai yra tiek fiziniai, tiek juridiniai asmenys — kai kurių prekių gamintojai ir importuotojai. Reikia žinoti, kad kai perkame maistą ar gėrimus, naudojame dujas ar elektrą, važiuojame automobiliu ar skrendame lėktuvu, tai į beveik visas produktų ar kuro kainas jau įskaičiuotas *akcizo* mokestis. Juo paprastai apmokestinami energetiniai resursai, įvairūs kvaišalai, kai kurios prabangos prekės, erotinio pobūdžio produkcija, kava, gaminiai iš kakavos.

Akcizo mokesčio *tarifai* nusakomi arba *konkrečia pinigų suma*, arba — *apmokestinamosios vertės dalimi procentais*. Jei akcizo kokiai nors prekei nėra, sakoma, kad tai *nulinis akcizo tarifas*.

1 PAVYZDYS. Už 25 tonas benzino sumokėtas 30 250 Lt akcizo mokestis. Koks akcizo mokestis už 1 toną benzino; už 18,5 tonos benzino?

Kadangi akcizo mokestis už 25 tonas benzino yra 30 250 Lt, tai už vieną toną sumokėta $30\,250 : 25 = 1210$ (Lt) akcizo. Šiuo atveju sakoma, kad akcizo mokesčio tarifas išreikštas konkrečia pinigų suma.
Akcizo mokestis už 18,5 t benzino yra $1210 \cdot 18{,}5 = 22\,385$ (Lt).

2 PAVYZDYS. Akcizo mokesčio tarifas ne senesniems kaip 5 metų ypač prabangiems automobiliams yra 15% automobilio kainos, viršijančios 60 000 Lt. Įsigyjant tokį automobilį sumokėtas 1125 Lt akcizo mokestis. Apskaičiuokime įsigyto automobilio kainą.

Kadangi akcizo mokestis 1125 Lt sudaro 15% sumos, viršijančios 60 000 Lt, tai ši viršijanti suma lygi $\frac{1125 \cdot 100}{15} = 7500$ (Lt).
Automobilis iš viso kainavo $60\,000 + 7500 = 67\,500$ (Lt).

Nors ir ne visiems tai patinka — mokesčius mokėti reikia visiems. Valstybė turi specialias institucijas, kurios prižiūri piliečių, įmonių ir organizacijų mokesčių mokėjimą.


Gal galite pasakyti, kokios institucijos atlieka šią priežiūrą?

XVII a. prancūzų valstybės veikėjas Žanas Batistas Kolbertas apie mokesčių sistemą yra pareiškęs: „Apmokestinimas — tai menas nupešti žąsį taip, kad pūkų būtų kuo daugiau, o gagenimo — kuo mažiau“. O buvęs JAV valstybinių mokesčių skyriaus komisijos narys Martimeras Caplinas apie mokesčius yra pasakęs taip: „Mokesčių rinkėjas nuo iškamšų meistro skiriasi tuo, kad pastarasis palieka nors kailį“.
Yra įvairiausių mokesčių. Pavyzdžiui, iš istorijos pamokų girdėtas vadinamasis *pagalvės mokestis*. Tai feodalizmo ir vėlesnių laikų kai kurių šalių neprivilegijuotų luomų — miestiečių, valstiečių ir pirklių svarbiausias mokestis valstybei. Pagalvės mokestis Lietuvos Didžiojoje kunigaikštystėje ir jos teritorijoje buvo mokamas XVII–XIX a., bet XIX a. pabaigoje pakeistas: miestiečiams ir pirkliams — *pajamų ir turto mokesčiu*, valstiečiams — *žemės mokesčiu*.
Dabartinė Lietuvos mokesčių sistema sukurta po Nepriklausomybės atkūrimo. Laikotarpiu nuo 1990 iki 1996 metų priimti visi dabartinių mokesčių įstatymai. Lietuvos mokesčių sistema yra labai panaši į Vakarų Europos valstybių mokesčių sistemas.

Pratimai ir uždaviniai

8. Naftos, išgaunamos šalies teritorijoje, akcizo mokesčio tarifo dydis lygus 20% išgautos naftos pardavimo kainos. Kiek mokesčių moka kompanija, išgavusi ir pardavusi naftos už:

a) 1,5 mln. litų; b) 3,2 mln. litų?

9. Įmonės ir organizacijos moka *nekilnojamojo turto* mokestį. Šio mokesčio metinis tarifas yra 1% turto vertės. Kokia nekilnojamojo turto vertė, jeigu mokestis už metus yra:

a) 250 Lt; b) 175,5 Lt; c) 2,3 tūkst. Lt; d) 0,8 tūkst. Lt?

10. Įmonės kiekvieną mėnesį moka *kelių* mokestį, kurio tarifo dydis yra 0,1–0,5% tos įmonės pajamų. Nuo kiek iki kiek litų gali būti kelių mokestis įmonės, jeigu jos pajamos yra:

a) 25 000 Lt; b) 600 000 Lt; c) 38,7 tūkst. Lt; d) 2,1 mln. Lt?

11. Privačios žemės savininkas kiekvienais metais moka *žemės* mokestį. Dirbamai (žemės ūkio paskirties) žemei to mokesčio tarifas yra 1,5% žemės kainos. Kiek ūkininkas sumokės *žemės* mokesčio už dirbamą žemę, jeigu jos plotas yra:

a) 18 ha; 25 ha, o 1 ha kaina — 2,5 tūkst. Lt;
b) 40,5 ha; 60,2 ha, o 1 ha kaina — 1,8 tūkst. Lt?

12. Už įvežamą į Lietuvą mazutą reikia mokėti akcizo mokestį, lygų 20 Lt už toną, o už įvežamus visų rūšių tepalus — 240 Lt už toną. Kiek akcizo mokesčio reikia mokėti įvežant:

a) 250 tonų mazuto ir 3,5 tonos tepalų;
b) 475 tonas mazuto ir 12,5 tonos tepalų;
c) 3,05 tūkst. tonų mazuto ir 0,85 tonos tepalų;
d) 1,89 tūkst. tonų mazuto ir 2,4 tonos tepalų?

13. Akcizo mokesčio tarifas ne senesniems kaip 5 metų ypač prabangiems automobiliams yra 15% kainos, viršijančios 60 tūkst. litų. Koks akcizas už automobilį, kurio kaina yra:

a) 65 000 Lt; b) 72 000 Lt; c) 75 000 Lt; d) 80 000 Lt?

14. Importuojamas alus apmokestinamas 0,4 Lt akcizu už litrą. Koks akcizo mokestis už 250:

a) dekalitrų (d$a\ell$); b) hektolitrų (hℓ);
c) kilolitrų (kℓ); d) megalitrų (Mℓ) alaus?

Draudimas

Ne tik iš reklamos, bet ir iš nukentėjusių įvairių nelaimingų atsitikimų metu esame girdėję, kad „*draustis pigiau*“. O kokia draudimosi prasmė apskritai? Žmonės, drausdami savo turtą, draudimo kompanijoms sumoka tam tikrą pinigų sumą, kuri sudaro tik keletą procentų (ar procento dalių) nuo apdraudžiamojo turto vertės, o draudimo kompanijos įsipareigoja įvykus nelaimei sumokėti (priklausomai nuo daugybės sąlygų) visą arba dalį apdrausto turto vertės.

PAVYZDYS. Žmogus vieneriems metams apdraudė savo turtą nuo gaisro 25 000 Lt sumai, sumokėdamas 0,5% draudimo sumos.
Draudimas žmogui kainavo $\frac{25\,000\cdot 0{,}5}{100} = 25\,000 \cdot 0{,}005 = 125$ (Lt).
Jei gaisras tais metais sunaikintų visą apdraustą turtą, žmogus iš draudimo kompanijos gali tikėtis 25 000 Lt kompensacijos.

Aišku, kad drausdamos kompanijos tikisi, jog nelaimė neįvyks. Todėl paprastai draudimo mokestis yra nedidelis, palyginti su draudimo suma. Kartu draudėjai įveda visokių apribojimų, kad sumažintų savo riziką. Visais atvejais draudimo mokestis nurodomas arba tam tikra pinigų suma, arba draudžiamos sumos procentais.

1 UŽDAVINYS. Draudžiant namų turtą vieneriems metams nuo įvairių nelaimių iki 10 000 Lt suma, vienoje draudimo bendrovėje reikia mokėti 50 Lt. Be to, taikoma 28% nuolaida. Apskaičiuokite, kiek toje bendrovėje kainuoja namų turto draudimas vieneriems metams 9999 Lt suma.

Sprendimas. Kadangi bet kurios draudimo sumos iki 10 000 Lt namų turto draudimo tarifas yra 50 Lt, tai draudimo mokestis su nuolaida yra $50 - \frac{50\cdot 28}{100} =$
$= 50 - 14 = 36$ (Lt).

2 UŽDAVINYS. Antrus metus eksploatuojamo lengvojo automobilio draudimo 50 000 Lt sumai vieneriems metams nuo vagystės tarifas yra 2,6% draudimo sumos, o septintus metus eksploatuojamo lengvojo automobilio draudimo ta pačia suma — 2,1% draudimo sumos. Apskaičiuokite draudimo mokestį kiekvienu atveju.

Sprendimas. Naujesnio automobilio draudimo nuo vagystės mokestis

$$\frac{50\,000 \cdot 2{,}6}{100} = 50\,000 \cdot 0{,}026 = 1300 \text{ (Lt)},$$

o senesnio —

$$\frac{50\,000 \cdot 2{,}1}{100} = 50\,000 \cdot 0{,}021 = 1050 \text{ (Lt)}.$$

3 UŽDAVINYS. Petraitis ir Jonaitis važinėja tų pačių metų laidos automobiliais. Petraitis vairuoja jau 20 metų, o Jonaitis — 3 metus. Abu draudžia savo automobilius 40 000 Lt sumai nuo avarijos vieneriems metams. Jonaitis už draudimą sumokėjo 2200 Lt, o Petraitis — 1440 Lt. Apskaičiuokite Petraičio ir Jonaičio automobilių draudimo tarifus procentais.

Sprendimas. Petraičio automobilio draudimo tarifas yra $\frac{1440 \cdot 100}{40\,000} = 3{,}6\,(\%)$, o Jonaičio — $\frac{2200 \cdot 100}{40\,000} = 5{,}5\,(\%)$.


Paaiškinkite, kodėl Petraičio ir Jonaičio automobilių draudimo tarifai yra nevienodi.

Užduotis. O kad būtų aiškiau, kada draudimo kompanijoms ir kokiomis sąlygomis verta drausti, išspręskite tokį uždavinį.

Viename Lietuvos pakraštyje, tarp gūdžių miškų, įsikūręs mažas Draudogalos kaimelis. Nors kaimelis ir mažas, bet pakankamai turtingas: pardavę surinktus grybus, iškopinėtą medų, konservuotas uogienes ir beržų sulą, jo gyventojai įprato gyventi be rūpesčių. O kad būtų dar ramiau, visas pagrindinis gyventojų turtas buvo apdraustas — iš čia ir kilo kaimelio vardas. Kaimelis turi tik vieną gatvę, kurios abiejose pusėse išsidėstę visi 12 ūkių. Kiekvienas namukas su visu jame esančiu turtu įvertintas net 40 000 Lt suma. Be to, kiekvienas šeimininkas turi po du automobilius: vieną sau, kitą — šeimynai važinėti. Kadangi gyvena kaimiečiai labai ramiai, namų nerakindami, eismo taisyklių nesilaikydami, draudimo saugomi, tai ir smulkių rūpesčių vis turi:

- kartą per metus užsidega kuris nors namas — prarandama 20% turto;
- kartą per metus į kurį nors namą trenkia žaibas — sudega 25% turto;
- kartą per pusmetį vagys apvagia kurį nors ūkį — prarandama 10% turto;
- kartą per mėnesį važinėdami savo vienintele gatve kaimo gyventojai apgadina vienas kito mašinas — bet nestipriai, nes remontas kiekvienam avarijos dalyviui vertinamas tik 5% draudimo vertės.

Draudimo kompanija „Kaimelio garantas“ kiekvieniems metams draudžia:

- visus namus ir jų turtą visa verte nuo gaisro su 1,5% tarifu, nuo stichinių nelaimių — su 0,8% tarifu ir nuo vagysčių — su 1,6% tarifu;
- kiekvieno šeimininko abi mašinas kiekvieną 10 000 litų sumai nuo avarijų: vieną su 4%, o antrąją — su 8% tarifu;
- kiekvieną mašiną nuo vagystės 2,8% tarifu irgi 10 000 litų sumai;

Ar verta draudimo kompanijai drausti Draudogalos kaimelio gyventojus surašytomis sąlygomis žinant, kad:

a) per metus nepavagiama nė viena mašina;
b) per metus pavagiama bent viena mašina?

Pratimai ir uždaviniai

15. Draudžiant namų turtą 12 000 Lt sumai nuo *stichinės nelaimės* reikia mokėti 72 Lt, o draudžiant namų turtą tai pačiai sumai nuo *vagystės* — 192 Lt. Draudžiant 12 000 Lt sumai nuo stichinės nelaimės ir nuo vagystės *kartu*, reikia mokėti 20% mažiau negu draudžiant atskirai. Kiek procentų draudimo sumos reikia mokėti draudžiant abiejomis rizikomis kartu?

16. Ūkininkas apdraudė namų turtą nuo stichinės nelaimės ir gaisro 11 000 Lt sumai, sumokėdamas 0,72% draudimo sumos, ir ūkinio pastato turtą tokiai pat sumai, sumokėdamas 1,025% draudimo sumos. Kiek kainavo draudimas ūkininkui?

17. Mūrinio gyvenamojo namo draudimo 75 000 Lt sumai nuo gaisro ir kitų nelaimių tarifas yra 0,15%, o medinio gyvenamojo namo draudimo tokiai pačiai sumai — 0,195%. Kiek litų brangiau kainuoja medinio gyvenamojo namo draudimas?

18. Sodo namelio draudimo 40 000 Lt sumai nuo gaisro, stichinių nelaimių ir įsilaužimo tarifas yra 0,275%, o sodybos draudimas tokiai pačiai sumai kainuoja 70 Lt daugiau. Koks sodybos draudimo mokesčio tarifas (procentais)?

19. Žinoma, kad lengvojo automobilio draudimas vieneriems metams nuo:

a) vagystės sudaro 2,4% draudimo sumos;
b) autoįvykio sudaro 3,2% draudimo sumos;
c) stichinės nelaimės — 0,8% draudimo sumos;
d) trečiųjų asmenų tyčinės veikos — 1,2% draudimo sumos.

Kokiai sumai kiekvienu atveju Jonaitis gali apdrausti savo lengvąjį automobilį, jeigu kiekvienu atveju jis planuoja išleisti draudimui tik 180 litų?

20. Transporto priemonių savininkų civilinės atsakomybės draudimas transporto priemonės vairuotojui 50 000 Lt sumai vieneriems metams turtinei žalai atlyginti kainuoja 490 Lt, o asmens žalai atlyginti — 160 Lt. Kai draudžiamasi kelerius metus iš eilės, taikomos nuolaidos: draudžiantis antrus metus — 5%, trečius — 10%, ketvirtus — 15%, penktus — 20%, šeštus ir daugiau — 25%.

a) Kiek procentų draudimo sumos sudaro turtinės žalos atlyginimo ir kiek asmens žalos atlyginimo įmokos, draudžiantis pirmais metais?
b) Kiek kainuoja turtinės žalos atlyginimo ir kiek asmens žalos atlyginimo draudimas 50 000 Lt sumai, draudžiantis iš eilės antrus; ketvirtus; šeštus; aštuntus metus?

1 SUDĖTINIAI PROCENTAI

1. Sudėtinės palūkanos 16
2. Sudėtinių procentų uždaviniai 22
3. Sudėtiniai procentai ir geometrinė progresija 27
Pasitikrinkite 33



1 Sudėtinės palūkanos

Jau mokame skaičiuoti paskolos paprastąsias palūkanas. Pavyzdžiui, jeigu su kaimynu Jonu susitarta dėl 10% metinių ***paprastųjų palūkanų***, tai jam paskolinta 2500 Lt suma kasmet padidėja tuo pačiu dydžiu $\frac{2500 \cdot 10}{100} = 250\,(\text{Lt})$. Po vienerių metų Jonas turėtų grąžinti 2750 Lt, po dvejų — 3000 Lt, o po trejų — 3250 Lt ir t. t. Paprastųjų palūkanų esmė ta, kad jos kasmet skaičiuojamos *nuo pradinės paskolos sumos.*

Tačiau turimus tuos pačius 2500 Lt galima padėti į banką, kuris skaičiuoja *sudėtines palūkanas.* Šios palūkanos randamos skaičiuojant *sudėtinius procentus*, t. y. procentų procentus. Jeigu bankas moka 10% metinių ***sudėtinių palūkanų***, tai indėlis kasmet padidėja $1 + \frac{10}{100} = 1{,}1$ karto, nes kitų metų palūkanos skaičiuojamos jau *nuo priaugusio indėlio.* Vadinasi, po metų indėlis bus $2500 \cdot 1{,}1 = 2750\,(\text{Lt})$, po dvejų metų — $2750 \cdot 1{,}1 = 3025\,(\text{Lt})$, o po trejų — $3025 \cdot 1{,}1 = 3327{,}5\,(\text{Lt})$ ir t. t. O tai akivaizdi sudėtinių palūkanų nauda indėlininkui, palyginus su paprastosiomis palūkanomis už paskolą kaimynui Jonui.

? Kiek kartų kasmet padidėja indėlis banke, kuris skaičiuoja 8% metinių sudėtinių palūkanų?

1 užduotis. Apskaičiuokite, kam bus lygus 10 000 Lt indėlis banke, kuris moka 8% metinių sudėtinių palūkanų, po vienerių, dvejų, trejų, ketverių, penkerių metų.

Apskritai jeigu pradinis indėlis banke yra S, o bankas moka $p\%$ metinių sudėtinių palūkanų, tai indėlis kasmet padidėja $\left(1 + \frac{p}{100}\right)$ karto. Todėl:
po metų jis bus $S_1 = S\left(1 + \frac{p}{100}\right)$;

po dvejų — $S_2 = S_1\left(1 + \frac{p}{100}\right) = S\left(1 + \frac{p}{100}\right) \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right) = S\left(1 + \frac{p}{100}\right)^2$;

po trejų — $S_3 = S_2\left(1 + \frac{p}{100}\right) = S\left(1 + \frac{p}{100}\right)^2 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right) = S\left(1 + \frac{p}{100}\right)^3$;

po ketverių — $S_4 = S_3\left(1 + \frac{p}{100}\right) = S\left(1 + \frac{p}{100}\right)^3 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right) = S\left(1 + \frac{p}{100}\right)^4$;

....

po t metų — $S_t = S_{t-1}\left(1 + \frac{p}{100}\right) = S\left(1 + \frac{p}{100}\right)^{t-1} \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right) = S\left(1 + \frac{p}{100}\right)^t$.

Vadinasi, jeigu pradinis indėlis banke yra S, o sudėtinių palūkanų norma — $p\%$, tai indėlio banke sumą S_t po t metų galima apskaičiuoti pagal formulę

$$S_t = S\left(1 + \frac{p}{100}\right)^t, \quad t \in \boldsymbol{N}$$

1 UŽDAVINYS. Į banką dvejiems metams buvo padėta 1500 Lt. Po dvejų metų indėlio suma banke buvo 1685,4 Lt. Raskite banko palūkanų normą, jei bankas skaičiuoja sudėtines palūkanas kartą per metus.

Sprendimas. Kadangi $S = 1500$ Lt, $S_2 = 1685{,}4$ Lt, o $t = 2$ m., tai

$$1685{,}4 = 1500\left(1 + \frac{p}{100}\right)^2, \quad \left(1 + \frac{p}{100}\right)^2 = 1{,}1236.$$

Iš čia $1 + \frac{p}{100} = 1{,}06$ (reiškinio $1 + \frac{p}{100}$ reikšmė negali būti neigiama), $p = 6\%$.

Atsakymas. Banko sudėtinių palūkanų norma yra 6%.

2 UŽDAVINYS. Po trejų metų banke, kuris skaičiuoja 6% metinių sudėtinių palūkanų, indėlio suma buvo 1786,52 Lt. Kiek pinigų buvo padėta į banką?

Sprendimas. Kadangi $t = 3$ m., $S_3 = 1786{,}52$ Lt, $p = 6\%$, tai

$$1786{,}52 = S \cdot 1{,}06^3, \quad S = \frac{1786{,}52}{1{,}06^3} \approx 1500\,(\text{Lt}).$$

Atsakymas. Į banką buvo padėta 1500 Lt.

Sudėtinės palūkanos gali būti skaičiuojamos ne tik už metus, bet ir kitokiais laiko tarpsniais, pavyzdžiui, kas pusmetį, kas ketvirtį, kas mėnesį. Jeigu sudėtinės metinės palūkanos $p\%$ už indėlį S skaičiuojamos m kartų per metus, tai kaskart skaičiuojamos $\frac{p}{m}\%$ sudėtinės palūkanos, o priskaičiuota suma S_{mt} po t metų, t. y. po $m \cdot t$ laiko tarpsnių, bus:

$$S_{mt} = S\left(1 + \frac{p}{m \cdot 100}\right)^{mt}, \quad m \in \boldsymbol{N}, t \in \boldsymbol{N}$$

Ši formulė gaunama analogiškai kaip ir $S_t = S\left(1 + \frac{p}{100}\right)^t$, $t \in \boldsymbol{N}$.
Pavyzdžiui, jei bankas skaičiuoja sudėtines palūkanas *kas mėnesį* ($m = 12$), tai po metų ($t = 1$) indėlis bus $S_{12 \cdot 1} = S\left(1 + \frac{p}{12 \cdot 100}\right)^{12 \cdot 1}$.

3 UŽDAVINYS. Apskaičiuokite palūkanų sumą, kuri susidaro po trejų metų, padėjus 1500 Lt į banką, kuris moka 6% metinių sudėtinių palūkanų, jeigu palūkanos skaičiuojamos *kas pusmetį*.

Sprendimas. Šiuo atveju palūkanos skaičiuojamos du kartus per metus ($m = 2$), todėl laiko tarpsnių yra $2 \cdot 3 = 6$, o pusmetinės palūkanos sudaro $6 \cdot \frac{1}{2} = 3\,(\%)$. Vadinasi, bankas už 1500 Lt indėlį 6 kartus skaičiuos sudėtines 3% palūkanas. Todėl po 3 metų banke už 1500 Lt indėlį bus priskaičiuota: $S_6 = S\left(1 + \frac{p}{100}\right)^6 = 1500 \cdot 1{,}03^6 \approx 1791{,}08\,(\text{Lt})$.
Palūkanos sudaro $1791{,}08 - 1500 = 291{,}08\,(\text{Lt})$.
Atsakymas. 291,08 Lt.

Priklausomai nuo palūkanų rūšies yra *pastoviųjų palūkanų* ir *mažėjančiųjų palūkanų* paskolos. Pastoviųjų palūkanų paskolas aptarėme 9 klasėje nagrinėdami paprastuosius procentus. Jų esmė ta, kad palūkanos visą laiką skaičiuojamos *nuo pradinės paskolos sumos*, nors paskola grąžinama dalimis ir skolos suma vis mažėja.

Kai paskola grąžinama dalimis, o palūkanos skaičiuojamos tik nuo *likusios negrąžintos paskolos dalies*, ji vadinama *mažėjančiųjų palūkanų* paskola.

PAVYZDYS. 4500 Lt paskola turi būti grąžinta per 3 metus lygiomis dalimis su kasmetinėmis 9% mažėjančiosiomis palūkanomis. Sudarykime paskolos grąžinimo planą.

Kasmet reikia grąžinti $4500 : 3 = 1500$ (Lt), t. y. trečdalį paskolos.

Paskolos likutis:

po metų — $4500 - 1500 = 3000$ (Lt);
po dvejų metų — $3000 - 1500 = 1500$ (Lt);
po trejų metų — $1500 - 1500 = 0$ (Lt).

Kasmet reikia sumokėti palūkanų:

pirmųjų metų gale — $4500 \cdot 0,09 = 405$ (Lt);
antrųjų metų gale — $3000 \cdot 0,09 = 270$ (Lt);
trečiųjų metų gale — $1500 \cdot 0,09 = 135$ (Lt).

Paskolos grąžinimo planą patogu surašyti į lentelę:

Mokėjimai (metai)	Paskolos likutis (litai)	Palūkanos (litai)	Grąžinama paskola (litai)	Iš viso grąžinama (litai)
1	4500	405	1500	1905
2	3000	270	1500	1770
3	1500	135	1500	1635
Iš viso:	—	810	4500	5310

2 užduotis. Sudarykite paskolos grąžinimo planą, jei 4500 Lt paskola turi būti grąžinta per 3 metus lygiomis dalimis su kasmetinėmis 9% pastoviosiomis palūkanomis.

Pratimai ir uždaviniai

21. Į banką padėta 8000 Lt. Kokia indėlio suma bus banke po 2 metų, jei bankas kartą per metus skaičiuoja:
a) 5%; b) 5,5%; c) 6%; d) 6,5% sudėtines palūkanas?

22. a) Padėta 3000 Lt į banką, kuris moka 7,5% metinių sudėtinių palūkanų. Kiek palūkanų bus gauta iš banko po dvejų metų?
b) Verslininkas gavo 3000 Lt paskolą dvejiems metams su 7,5% metinėmis paprastosiomis palūkanomis. Kiek palūkanų sumokės verslininkas?

23. Paskolinta 7500 Lt trejiems metams su 6% palūkanų norma. Kiek bus gauta palūkanų už paskolą, jei sutartos:
a) paprastosios palūkanos; b) sudėtinės palūkanos?

24. Apskaičiuokite palūkanų sumą, kuri gaunama per 4 metus su 4,5% sudėtinių metinių palūkanų norma padėjus į banką:
a) 3000 Lt; b) 3500 Lt; c) 4000 Lt; d) 4500 Lt.

25. Indėlio banke suma (litais) priklausomai nuo metų skaičiaus t apskaičiuojama pagal formulę $S_t = 1500 \cdot 1{,}08^t$.
a) Kiek litų padėta į banką?
b) Kokia banko metinių sudėtinių palūkanų norma?
c) Apskaičiuokite indėlio sumą po 1; 3; 4 metų.
d) Kiek už indėlį bus priskaičiuota palūkanų po 8 metų; po 10 metų?

26. Kiek metinių sudėtinių palūkanų skaičiavo bankas, jei padėtas 2000 Lt indėlis per dvejus metus išaugo iki:
a) 2163,2 Lt; b) 2205 Lt; c) 2247,2 Lt; d) 2226,05 Lt?

27. Kiek pinigų reikia padėti į banką su 8% metinėmis sudėtinėmis palūkanomis, kad susidarytų 12 tūkst. litų suma po:
a) 2 metų; b) 3 metų; c) 4 metų; d) 5 metų?

28. Petraitis padėjo 7500 Lt į banką, kuris moka 6% metinių sudėtinių palūkanų. Po kiek laiko jo indėlis banke priaugs iki:
a) 8932,62 Lt; b) 9468,58 Lt?

29*. Indėlininkas atidarė 10 000 Lt sąskaitą banke, kuris moka 7,5% metinių sudėtinių palūkanų. Po kelerių metų toje sąskaitoje bus ne mažiau kaip:
a) 15 000 Lt; b) 16 000 Lt; c) 17 500 Lt; d) 18 500 Lt?

30. Kiek kartų ir kokio didumo (procentais) sudėtinės palūkanos už laiko tarpsnį buvo skaičiuojamos banke už indėlį padėtą:

a) dvejiems metams su 7% metinėmis palūkanomis skaičiuojant jas kas pusmetį;

b) trejiems metams su 12% metinėmis palūkanomis skaičiuojant jas kas mėnesį?

31. Apskaičiuokite palūkanų sumą, kuri susidaro per 2 metus padėjus 10 000 Lt į banką, mokantį 12% sudėtinių palūkanų, jeigu bankas palūkanas skaičiuoja kas:

a) pusmetį; b) keturis mėnesius; c) ketvirtį; d) mėnesį.

32. Metams padėta 10 000 Lt į banką, kurio palūkanų norma yra 12%. Kaip naudingiau indėlininkui, ar kai bankas skaičiuoja sudėtines palūkanas kas keturis mėnesius, ar kas du mėnesius?

33. 4000 Lt paskola turi būti grąžinta per 4 metus lygiomis dalimis su kasmetinėmis 13% mažėjančiomis palūkanomis. Sudarykite paskolos grąžinimo planą.

34. 20 000 Lt paskola turi būti grąžinta per 5 metus lygiomis dalimis su kasmetinėmis 15% mažėjančiomis palūkanomis.

a) Sudarykite paskolos grąžinimo planą.

b) Kiek skolininkas iš viso sumokės per 5 metus?

35. Kiek palūkanų reikės sumokėti už 2400 Lt paskolą, kuri turi būti grąžinta per 3 metus lygiomis kasmetinėmis dalimis su:

a) 10% mažėjančiomis palūkanomis;

b) 6% pastoviosiomis palūkanomis?

36. Apdraudžiant butą daugiabučiame name nuo gaisro ir kitų nelaimingų atsitikimų reikia mokėti 0,11% buto draudimo sumos.

a) Kiek reikia mokėti draudžiant butą 55 000 Lt; 60 000 Lt sumai?

b) Kokiai sumai apdraustas butas, jeigu draudimo įmoka yra 49,5 Lt; 82,5 Lt?

37. Statybininko draudimas traumos atveju metams kainuoja 180 Lt. Kokiai sumai apsidraudęs statybininkas, jeigu jam reikėjo mokėti nuo draudimo sumos:

a) 2,0%; b) 1,8%; c) 1,5%; d) 1,2%?

38. Akcizo mokesčio tarifas ne senesniems kaip 5 metų ypač prabangiems automobiliams yra 15% kainos, viršijančios 60 000 Lt. Apskaičiuokite įsigyto automobilio kainą, jei įsigyjant tokį automobilį buvo sumokėtas akcizo mokestis, lygus:

a) 675 Lt; b) 1575 Lt.

39. Prekė kainavo 18 Lt. Penkis kartus po tiek pat litų atpiginus prekę dabar ji kainuoja:

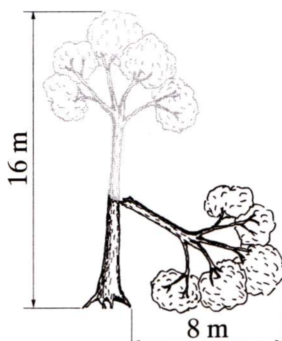
a) 15 Lt; b) 14 Lt.

Apskaičiuokite, kiek litų kiekvieną kartą atpigo prekė, ir parašykite prekės kainų nuo pradinės iki dabartinės reikšmių seką.

40. Lygiakraščio trikampio kraštinė lygi $4\sqrt{3}$ cm. Apskaičiuokite:

a) trikampio aukštinę;
b) trikampio plotą;
c) apibrėžto apie trikampį skritulio plotą;
d) įbrėžto į trikampį apskritimo ilgį.

41. Vėtra nulaužė 16 m aukščio medį. Medžio viršūnė remiasi į žemę 8 metrų atstumu nuo kamieno. Kokiame aukštyje nuo žemės nulūžo medis?



42. Tomas ir Gintaras važiuoja dviračiais žiediniame treke. Tomas treko žiedą nuvažiuoja per 4 minutes, o Gintaras — per 3 minutes. Kas kiek laiko Gintaras aplenkia Tomą?

A 3 min **B** 4 min **C** 7 min **D** 12 min **E** 25 min

43. Trijose dėžutėse yra žirniai, kruopos ir cukrus. Ant vienos dėžutės parašyta „Kruopos“, ant antros — „Žirniai“, o ant trečios — „Kruopos arba cukrus“. Žinoma, kad dėžučių turinys neatitinka užrašų ant dėžučių. Kurioje dėžutėje kas yra?

2 Sudėtinių procentų uždaviniai

Ne tik palūkanų skaičiavimai susiję su *sudėtiniais procentais*. Vystantis laisvajai rinkai labai populiarūs tampa prekių perkainojimai priklausomai nuo paklausos, sezono arba net nuo švenčių.

Jau mokame apskaičiuoti, kokia bus prekės kaina, ją atpiginus (pabranginus) keletą kartų po tiek pat procentų.

Pavyzdžiui, jei prekė kainavusi 20 Lt buvo atpiginama tris kartus po 5%, tai:

po pirmojo atpiginimo ji kainavo $20 \cdot 0,95 = 19$ (Lt);
po antrojo — $19 \cdot 0,95 = 18,05$ (Lt);
po trečiojo — $18,05 \cdot 0,95 \approx 17,15$ (Lt).

? Kiek būtų kainavusi prekė, ją branginant 3 kartus po 5%?

Jeigu prekė, kurios kaina buvo S, atpiginama (pabranginama) n kartų po p procentų, tai kiekvieną kartą prekės kaina sumažėja $\left(1 - \frac{p}{100}\right)$ karto. Todėl:

po pirmojo kainos sumažinimo prekės kaina bus $S_1 = S\left(1 - \frac{p}{100}\right)$;
po antrojo — $S_2 = S_1\left(1 - \frac{p}{100}\right) = S\left(1 - \frac{p}{100}\right)^2$;
po trečiojo — $S_3 = S_2\left(1 - \frac{p}{100}\right) = S\left(1 - \frac{p}{100}\right)^3$;
. . . . ;
po n-tojo kainos sumažinimo prekės kaina bus

$$S_n = S_{n-1}\left(1 - \frac{p}{100}\right) = S\left(1 - \frac{p}{100}\right)^n.$$

Užduotis. Analogiškai samprotaudami parašykite prekės, kainavusios S Lt, kainą po pirmojo, antrojo, trečiojo, ..., n-tojo kainų pabranginimo po p%.

Apskritai jeigu prekė kainavusi S buvo n kartų atpiginama (pabranginama) po p procentų, tai jos *dabartinę kainą* S_n galima apskaičiuoti pagal formulę

$$\boxed{S_n = S\left(1 \mp \frac{p}{100}\right)^n}$$

1 UŽDAVINYS. Prekė atpigo tris kartus po 12%. Dabar ji kainuoja 102,22 Lt.
a) Kiek kainavo prekė iš pradžių?
b) Kiek procentų (šimtosios tikslumu) atpigo prekė?

Sprendimas. a) Kadangi $n = 3$, $p = 12\%$, $S_3 = 102,22$ Lt, tai pagal formulę:

$$102,22 = S\left(1 - \frac{12}{100}\right)^3, \quad 102,22 = S \cdot 0,88^3, \quad S = \frac{102,22}{0,88^3} \approx 150 \text{ (Lt)}.$$

b) Prekė atpigo $\frac{(150-102,22)\cdot 100}{150} \approx 31,85$ (%).

Atsakymas. a) ≈ 150 Lt; b) $\approx 31,85\%$.

2 UŽDAVINYS. Prekė kainavo 40 Lt. Du kartus po tiek pat procentų pabranginus prekę, ji dabar kainuoja 48,4 Lt. Kiek procentų kiekvieną kartą pabrango prekė?

Sprendimas. Pagal formulę:

$$48{,}4 = 40\left(1 + \frac{p}{100}\right)^2, \quad \left(1 + \frac{p}{100}\right)^2 = 1{,}21.$$

Kadangi $1 + \frac{p}{100} > 0$, tai

$$1 + \frac{p}{100} = \sqrt{1{,}21}, \quad 1 + \frac{p}{100} = 1{,}1, \quad p = 10\%.$$

Atsakymas. Prekė kiekvieną kartą pabrango po 10%.

3 UŽDAVINYS. Gyvenamojo namo pradinė vertė yra 100 000 Lt. Kasmet namo vertė sumažėja po 0,9%. Kokia bus gyvenamojo namo likutinė vertė po: a) 5 metų; b) 10 metų?

Sprendimas.

a) Po 5 metų gyvenamojo namo likutinė vertė bus:

$$\begin{aligned} 100\,000 \cdot \left(1 - \frac{0{,}9}{100}\right)^5 &= 100\,000 \cdot (1 - 0{,}009)^5 = \\ &= 100\,000 \cdot 0{,}991^5 \approx \\ &\approx 95\,580{,}27\,(\text{Lt}). \end{aligned}$$

b) Po 10 metų gyvenamojo namo likutinė vertė bus:

$$100\,000 \cdot \left(1 - \frac{0{,}9}{100}\right)^{10} = 100\,000 \cdot 0{,}991^{10} \approx 91\,355{,}89\,(\text{Lt}).$$

Atsakymas. a) 95 580,27 Lt; b) 91 355,89 Lt.

Pratimai ir uždaviniai

44. Prekė kainavo 75 Lt. Kokia prekės dabartinė kaina, jei ji po 10% atpigo:
a) du kartus; b) tris kartus; c) keturis kartus; d) penkis kartus?

45. Prekė kainavo 75 Lt. Kokia prekės dabartinė kaina, jei ji po 8% pabrango:
a) du kartus; b) tris kartus; c) keturis kartus; d) penkis kartus?

46. Prekė atpigo du kartus po 15%. Dabar ji kainuoja 130,05 Lt.
a) Kiek kainavo prekė iš pradžių?
b) Kiek procentų iš viso atpigo prekė?
c) Kiek kainavo prekė po pirmojo kainos sumažinimo?
d) Kiek kainuotų prekė jos dabartinę kainą padidinus du kartus po 15%?

47. Prekė atpigo du kartus po 5%. Dabar ji kainuoja 126,35 Lt.
a) Kiek kainavo prekė iš pradžių?
b) Kiek procentų iš viso atpigo prekė?
c) Kiek kainavo prekė po pirmojo kainos sumažinimo?
d) Kiek kainuotų prekė jos dabartinę kainą sumažinus dar tris kartus po 5%?

48. Prekė kainavo 50 Lt. Keliais procentais kiekvieną kartą pakito prekės kaina, jei du kartus po tiek pat procentų:
a) atpiginus prekę, dabar ji kainuoja 38,72 Lt;
b) pabranginus prekę, dabar ji kainuoja 58,32 Lt?

49. Atidarius parodą pirmąją dieną ją aplankė 2000 žmonių, o kiekvieną kitą dieną — vis 10% lankytojų mažiau, negu prieš tai buvusią. Kiek žmonių (dešimties tikslumu) aplankė parodą:
a) trečiąją dieną; b) ketvirtąją dieną; c) per 3 dienas; d) per 4 dienas?

50. Bakterijų skaičius mėgintuvėlyje kasdien padidėja penkis kartus.
a) Kiek bakterijų mėgintuvėlyje bus po 4 dienų, jei dabar jų yra 500?
b) Kiek kartų bakterijų skaičius mėgintuvėlyje po 4 dienų bus didesnis už jų pradinį skaičių?

51. Tam tikros rūšies piktžolių skaičius sklype, jų nenaikinant, kasmet padidėja trigubai. Dabar piktžolių yra 50. Kiek šių piktžolių bus sklype po:
a) dvejų metų; b) trejų metų?

52. Staklės pirktos už 25 000 Lt. Kasmet jos nuvertėja po 20%.
a) Kokia bus staklių vertė po 6 metų; po 9 metų?
b) Kiek procentų (tūkstantosios tikslumu) nuvertės staklės per 6 metus; per 9 metus?

53. Du metus kasmet miesto gyventojų skaičius sumažėjo po tiek pat procentų. Po kiek procentų sumažėjo kasmet miesto gyventojų skaičius, jeigu jis sumažėjo nuo 250 000 iki:
a) 230 400; b) 220 900.

54. Prekė kainavo a Lt. Kaip ir kiek procentų pakito prekės kaina, jei prekė buvo:
a) atpiginta du kartus po 10%, o po to pabranginta du kartus po 10%;
b) pabranginta du kartus po 20%, o po to atpiginta du kartus po 20%?

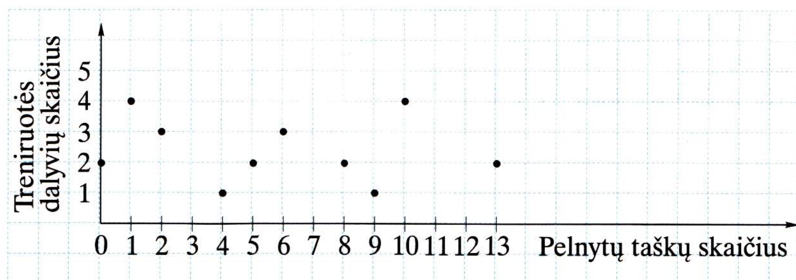
55. Jeigu prekės kaina du kartus po tiek pat procentų būtų padidinta, tai prekė kainuotų 11 236 Lt, o jeigu sumažinta — tai kainuotų 8836 Lt. Kiek kainuoja prekė?

56. Išspręskite lygtį:
a) $\frac{x^2-4x}{x^2-16}=0$; b) $\frac{x^2-16}{x^2-4x}=0$.

57. Kavinės savininkė, tirdama sąnaudas vienam didžkukuliui pagaminti ir realizuoti, nustatė, kad vieneto savikaina $S(x)$ centais tą dieną, kai išverdama ir realizuojama x didžkukulių, yra:
a) $S(x)=2x^2-280x+10\,100$; b) $S(x)=3x^2-480x+19\,470$.
1) Kiek reikia parduoti didžkukulių, kad vieneto savikaina būtų mažiausia?
2) Kokia minimali didžkukulio savikaina?

58. Iš skaičių 1,5; 3; -2; 0; 1; π; $\sqrt{3}$; $-\frac{2}{7}$ išrinkite:
a) natūraliuosius skaičius;
b) sveikuosius skaičius;
c) racionaliuosius skaičius;
d) iracionaliuosius skaičius;
e) realiuosius skaičius.

59. Treniruotėje žaidžiant krepšinį žaidėjų pelnyti taškai pavaizduoti diagramoje.



a) Kiek žmonių treniruotėje žaidė krepšinį?
b) Kiek taškų (dešimtosios tikslumu) vidutiniškai pelnė vienas žaidėjas?

60. Duotą skaičių parašykite standartine išraiška ir nustatykite, kokia jo eilė:
a) 80 000; b) 0,0173.

61. Raskite x, jeigu:

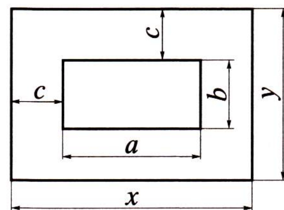
a) $5000\,\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} = x\,\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$; b) $0{,}05\,\frac{\text{g}}{\text{cm}^3} = x\,\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$.

A 0,05 **B** 0,5 **C** 5 **D** 50 **E** 500

62. Trikampis ABC ($\angle C = 90°$) — statusis, kurio $AC = 6$ cm, $BC = 3$ cm. Atkarpoje AC pažymėtas toks taškas M, kad $AM = x$ ($0 < x < 6$), o spindulyje CB (atkarpos CB išorėje) — toks taškas K, kad $BK = x$.
a) Įrodykite, kad trikampio ACK plotas yra lygus $(3x + 9)$ cm^2.
b) Raskite trikampio BCM plotą.
c) Raskite keturkampio $AMBK$ plotą.
d) Su kuria x reikšme keturkampio $AMBK$ plotas lygus trikampio BCM plotui?
e) Toje pačioje koordinačių plokštumoje nubraižykite funkcijos $S_1(x)$, reiškiančios trikampio BCM ploto priklausomybę nuo x, grafiką ir funkcijos $S_2(x)$, reiškiančios keturkampio $AMBK$ ploto priklausomybę nuo x, grafiką.
f) Remdamiesi punktu e) nustatykite, su kuriomis x reikšmėmis keturkampio ploto $S_2(x)$ reikšmės yra mažesnės už trikampio ploto $S_1(x)$ reikšmes.

63. Nuo stačiakampio popieriaus lapo nukirpus vieną kampą gautas penkiakampis, kurio kraštinių ilgiai didėjančia tvarka yra 3 cm, 5 cm, 9 cm, 10 cm ir 13 cm. Raskite gautojo penkiakampio plotą.

64*. Veja yra stačiakampio formos. Jos ilgis yra x, o plotis — y. Vejos viduryje yra įrengtas stačiakampis baseinas. Baseiną juosia vienodo pločio c vejos takas. Baseino ilgis yra a, o plotis — b. Parašykite priklausomybę:



a) tako pločio c nuo x ir a;
b) tako ploto S_1 nuo a, b ir x;
c) baseino ploto S_2 nuo x, y ir c.

3 Sudėtiniai procentai ir geometrinė progresija

Nagrinėtuose dviejuose skyreliuose įsitikinome, kad sudėtinės palūkanos, sprendžiant įvairius uždavinius, buvo skaičiuojamos pagal vieną ir tą patį algoritmą. Jo esmė — tam tikro dydžio *pradinės reikšmės* dauginimas vis iš to paties *pastovaus skaičiaus*. Šis skaičius, priklausomai nuo konkrečios situacijos, yra

$$1 - \frac{p}{100} \quad \text{arba} \quad 1 + \frac{p}{100};$$

čia p — sudėtiniai procentai.

1 PAVYZDYS. Apskaičiuokime 5000 Lt indėlio, padėto į banką, kuris skaičiuoja 6% metinių sudėtinių palūkanų, augimą pirmaisiais penkeriais metais.

Pirmųjų metų pradžioje indėlio suma banke yra 5000 Lt.

Kadangi kasmet indėlis padidėja $\left(1 + \frac{6}{100}\right) = 1{,}06$ karto, tai:

antrųjų metų pradžioje banke bus $5000 \cdot 1{,}06 = 5300$ (Lt),

trečiųjų metų pradžioje — $5300 \cdot 1{,}06 = 5000 \cdot 1{,}06^2 = 5618$ (Lt),

ketvirtųjų metų pradžioje — $5618 \cdot 1{,}06 = 5000 \cdot 1{,}06^3 = 5955{,}08$ (Lt),

penktųjų metų pradžioje — $5955{,}08 \cdot 1{,}06 = 5000 \cdot 1{,}06^4 = 6312{,}38$ (Lt).

Kaip matome, nagrinėjamo pavyzdžio indėlio sumą b_n (litais) n-tųjų metų pradžioje galima apskaičiuoti ir pagal formulę

$$b_n = 5000 \cdot 1{,}06^{n-1}.$$

Iš eilės surašykime indėlių sumas kiekvienų metų pradžioje:

5000; 5300; 5618; 5955,08; 6312,38; ...

Šios sekos kiekvienas narys, pradedant antruoju, gaunamas prieš jį esantį narį padauginus iš skaičiaus 1,06.

Nelygių nuliui skaičių seka (b_n), kurios kiekvienas narys, pradedant antruoju, lygus prieš jį einančiam nariui, padaugintam iš pastovaus nelygaus nuliui skaičiaus (tas skaičius vadinamas geometrinės progresijos vardikliu), vadinama geometrine progresija.

Geometrinės progresijos nariai paprastai žymimi taip: $b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$; čia $b_n \neq 0$, $n \in \mathbf{N}$; b_1 — pirmasis progresijos narys, ..., b_n — n-tasis progresijos narys. Žinant geometrinės progresijos pirmąjį narį b_1 ir vardiklį q, galima nuosekliai apskaičiuoti antrąjį, trečiąjį ir apskritai — bet kurį jos narį:

$$b_2 = b_1 q,$$
$$b_3 = b_2 q = (b_1 q)q = b_1 q^2,$$
$$b_4 = b_3 q = (b_1 q^2)q = b_1 q^3,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\boxed{b_n = b_1 q^{n-1}}$$

Ši formulė vadinama geometrinės progresijos n-tojo nario formule.

Štai keletas geometrinių progresijų pavyzdžių:

a) kai $b_1 = 1$ ir $q = 0{,}2$, gauname 1; 0,2; 0,04; 0,008; ...;
b) kai $b_1 = -1$ ir $q = 4$, gauname -1; -4; -16; -64; ...;
c) kai $b_1 = 2$ ir $q = -4$, gauname 2; -8; 32; -128; ....

2 PAVYZDYS. Apskaičiuokime motorinės valties, kurios pradinė vertė buvo 6000 Lt, likutines vertes per pirmuosius ketverius metus, jei kasmet valties vertė sumažėja po 15% buvusios vertės. Raskime motorinės valties vertę po 10 metų.

Motorinės valties likutines vertes per pirmuosius ketverius metus galima apskaičiuoti prieš metus buvusią vertę dauginant iš skaičiaus $1 - \frac{15}{100} = 0{,}85$.

Valties vertė bus:

pirmaisiais metais — 6000 Lt;
antraisiais metais — $6000 \cdot 0{,}85 = 5100$ (Lt);
trečiaisiais metais — $5100 \cdot 0{,}85 = 6000 \cdot 0{,}85^2 = 4335$ (Lt);
ketvirtaisiais metais — $4335 \cdot 0{,}85 = 6000 \cdot 0{,}85^3 = 3684{,}75$ (Lt).

Motorinės valties vertę po 10 metų, t. y. vienuoliktaisiais metais, galima apskaičiuoti pagal formulę $b_{11} = b_1 \cdot q^{11-1}$. Taigi jos likutinė vertė po 10 metų bus $6000 \cdot 0{,}85^{10} \approx 1181{,}25$ (Lt).

3 PAVYZDYS. Apskaičiuokime, kiek iš viso uždirbo darbuotojas per ketvirtį, jeigu žinome, kad pirmąjį mėnesį jo atlyginimas buvo 800 Lt, o po to kas mėnesį atlyginimas didėjo vis 3%.

Antrąjį mėnesį darbuotojas uždirbo $800 \cdot 1{,}03 = 824$ (Lt), trečiąjį mėnesį — $824 \cdot 1{,}03 = 848{,}72$ (Lt), o per tris mėnesius darbuotojas iš viso uždirbo $800 + 824 + 848{,}72 = 2472{,}72$ (Lt).

Kaip matome, kai reikia rasti tik kelių geometrinės progresijos narių sumą, paprasčiausiai apskaičiavę šiuos narius juos sudedame. Jeigu reikia apskaičiuoti keliolikos ar keliasdešimties narių sumą, skaičiavimus labai palengvina geometrinės progresijos pirmųjų n narių sumos formulė.

Apskaičiuokime geometrinės progresijos $b_1, b_2, b_3, \ldots$, kurios vardiklis yra q, pirmųjų n narių sumą S_n:

$$S_n = b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_{n-1} + b_n. \quad (1)$$

Šios lygybės abi puses padauginę iš q gauname:

$$S_n q = b_1 q + b_2 q + b_3 q + \cdots + b_{n-1} q + b_n q.$$

Kadangi $b_1 q = b_2$, $b_2 q = b_3$, $b_3 q = b_4$, $\ldots$, $b_{n-1} q = b_n$, tai

$$S_n q = b_2 + b_3 + b_4 + \cdots + b_n + b_n q. \quad (2)$$

Iš (2) lygybės panariui atėmę (1) lygybę ir sutraukę panašiuosius narius gauname:

$$\begin{array}{rl} S_n q = & \phantom{b_1 +{}} b_2 + b_3 + b_4 + \cdots + b_n + b_n q, \\ - \quad S_n = & b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + \cdots + b_n, \\ \hline S_n q - S_n = & b_n q - b_1, \\ S_n(q-1) = & b_n q - b_1. \end{array}$$

Iš čia

$$\boxed{S_n = \frac{b_n q - b_1}{q-1}; \quad q \neq 1}$$

4 PAVYZDYS. Darbuotojo atlyginimas sausio mėnesį buvo 800 Lt. Metus laiko kas mėnesį darbuotojo atlyginimas didėjo po 2%. Apskaičiuokime, kiek iš viso darbuotojas uždirbo per metus.

Sprendimas. Darbuotojo uždarbis per metus atitinka geometrinės progresijos, kurios pirmasis narys $b_1 = 800$, o vardiklis $q = 1 + \frac{2}{100} = 1{,}02$, pirmųjų dvylikos narių sumą S_{12}. Dvyliktasis narys yra $b_{12} = 800 \cdot 1{,}02^{12-1} = 800 \cdot 1{,}02^{11} \approx 994{,}70$.

Pagal formulę $S_{12} = \frac{b_{12} q - b_1}{q-1}$ turime:

$$S_{12} \approx \frac{994{,}70 \cdot 1{,}02 - 800}{1{,}02 - 1} = \frac{214{,}594}{0{,}02} = 10\,729{,}7 \text{ (Lt)}.$$

Pratimai ir uždaviniai

65. Į banką padėta 10 000 Lt. Indėlis kasmet padidėja 8%. Parašykite, kaip augo indėlis banke pirmais ketveriais metais.

66. Parašykite medienos kiekio miško sklype reikšmių seką per penkerius metus, jeigu pradinis medienos kiekis lygus $3{,}0 \cdot 10^4\ \text{m}^3$, o medienos prieaugis per metus sudaro:
a) 10%; b) 12%.

67. Šeima išlošė 40 000 Lt ir nutarė kasmet išleisti 20% likutinės laimėjimo sumos. Kiek litų laimėjimo bus likę po:
a) 3 metų; b) 4 metų; c) 5 metų; d) 6 metų?

68. Slėgis inde yra 750 mm Hg. Kiekvienu siurblio stūmoklio judesiu iš indo išsiurbiama 15% jame esančio oro. Apskaičiuokite, koks bus oro slėgis (vieneto tikslumu) inde po:
a) dviejų; b) keturių; c) septynių; d) dešimties stūmoklio judesių.

69. Miesto gyventojų prieaugis per metus sudaro vidutiniškai 5%. Dabar mieste gyvena 50 000 gyventojų. Kiek reikia tikėtis mieste gyventojų (šimtų tikslumu) po:
a) penkerių metų; b) dešimties metų?

70*. Išlošusi „Aukso kapšą" šeima kasmet išleisdavo po 25% likutinės pinigų sumos. Po 4 metų šeimai buvo likę 126 562,5 Lt.
a) Kokia buvo laimėjimo suma?
b) Kiek laimėjimo bus likę šeimai po 10 metų?
c) Kiek litų išleido šeima per ketverius pirmuosius metus; penkerius pirmuosius metus?

71*. Po kelerių metų iš palikimo sumos beliks 62,5 Lt, jei kasmet įpėdiniai išleidžia po 50% likusios sumos, o palikta buvo 8000 Lt?

72. Bakterijų skaičius inde kasdien padidėja keturis kartus. Kiek bakterijų bus inde po 5 dienų, jei iš pradžių jų buvo:
a) 500; b) 600?

73. Į lygiakraštį trikampį, kurio kraštinė lygi 32 cm, įbrėžtas kitas trikampis, kurio viršūnės yra pirmojo trikampio kraštinių vidurio taškai. Į antrąjį trikampį tokiu pačiu būdu įbrėžtas trečiasis trikampis ir t. t.
a) Įsitikinkite, kad šių trikampių perimetrai sudaro geometrinę progresiją.
b) Kiek procentų pirmesniojo trikampio perimetro sudaro paskesniojo trikampio perimetras?
c) Raskite septinto tokio trikampio perimetrą.
d) Apskaičiuokite septynių pirmųjų trikampių perimetrų sumą.

74. Darbininko atlyginimas sausio mėnesį buvo 750 Lt. Vėliau kas mėnesį jis didėjo po:

a) 2%; b) 3,5%.

Kiek iš viso darbininkas uždirbo per metus?

75. Šeima sausio mėnesį suvartojo 200 kWh elektros energijos. Pusę metų kas mėnesį jiems pavyko sutaupyti elektros energijos, palyginti su praėjusiu mėnesiu, po:

a) 3%; b) 4%.

Kiek kilovatvalandžių elektros energijos šeima suvartojo per pusę metų?

76. Į banką, kurio metinių sudėtinių palūkanų norma 5%, padėta 4000 Lt. Parašykite formulę, pagal kurią galima apskaičiuoti indėlio sumą banke po t metų, jeigu bankas palūkanas skaičiuoja kas:

a) pusmetį; b) ketvirtį.

77. Indėlis, padėtas į banką, kuris skaičiuoja sudėtines palūkanas, po vienerių metų išaugo iki 6300 Lt, o po dvejų metų — iki 6615 Lt.

a) Kokia banko palūkanų norma?

b) Kiek pinigų buvo padėta į banką?

c) Iki kiek išaugs indėlis po 5 metų; 8 metų?

78. Namų turto draudimo didesnei negu 150 000 Lt sumai įmokos tarifas yra 0,2%. Taikoma iki 50% nuolaida priklausomai nuo turto apsaugos pobūdžio, jeigu draudžiama nebe pirmus metus ir pan. Kokia gali būti mažiausia įmoka draudžiant turtą:

a) 151 000 Lt; b) 160 000 Lt; c) 175 000 Lt; d) 200 000 Lt sumai?

79. Akcizo mokesčio tarifas reaktyvinių variklių kurui, žibalui, dyzeliniams degalams, skystam krosnių kurui yra vienodas. Už 2,5 tūkst. tonų dyzelinių degalų sumokėtas 1 400 000 Lt akcizo mokestis. Koks akcizo mokestis bus už:

a) 780 tonų dyzelinių degalų; b) 1250 tonų reaktyvinių variklių kuro;

c) 450 tonų žibalo; d) 2050 tonų skysto krosnių kuro?

80. Raskite taškų, kuriuose kertasi funkcijų $f(x) = x^2 - 1$ ir $g(x) = 3x - 3$ grafikai, koordinates.

81. Apskaičiuokite reiškinio reikšmę:

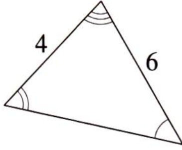
a) $3^{-6} \cdot \left(-\frac{1}{27}\right)^{-3}$; b) $\left(\sqrt{50} - 5\sqrt{18}\right) \cdot 3\sqrt{2}$; c) $\left(\sqrt{3} - 1\right)\left(\sqrt{3} + 1\right)$.

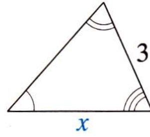
82. Išspręskite nelygybių sistemą:

a) $\begin{cases} 5 - x < 2, \\ 5 > 2{,}5x; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 4 - 3x > x + 6, \\ 2x + 3 < x + 2. \end{cases}$

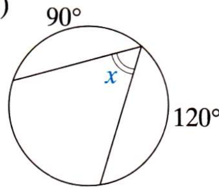
83. Apskaičiuokite x:

a)





b)



84. Plytelėmis reikia iškloti lygiakraščio trikampio formos aikštelę, kurios kraštas lygus 2 m. Parduotuvėje yra plytelių, kurios yra lygiakraščio trikampio formos ir kurių kraštas yra 1 dm ilgio. Kiek reikia tokių plytelių aikštelei iškloti?

A 100 **B** 200 **C** 300 **D** 400 **E** 600

85*. Reikia pagaminti 36 dm^3 tūrio stačiakampio gretasienio formos atvirą dėžę. Kokie turi būti dėžės matmenys, kad briaunų ilgiai decimetrais būtų išreiškiami natūraliaisiais skaičiais, didesniais už 1, o dėžės paviršiaus plotas būtų mažiausias?

Pasitikrinkite

1. Į banką, kurio metinių sudėtinių palūkanų norma yra 6%, padėta 5000 Lt. Kiek palūkanų bus gauta po:

a) dvejų; b) trejų; c) ketverių; d) penkerių metų?

2. Į banką padėta 2500 Lt dvejiems metams. Kiek metinių sudėtinių palūkanų (procentais) mokėjo bankas, jei ši suma išaugo iki:

a) 2809 Lt; b) 2862,25 Lt?

3. Kokią pinigų sumą reikia padėti į banką, kuris moka 6% metinių sudėtinių palūkanų, kad ji priaugtų iki 5000 Lt po:

a) 2 metų; b) 3 metų?

4. Ūkininkas 8000 Lt padėjo į banką, kuris moka 8% metinių sudėtinių palūkanų. Po kelerių metų indėlio suma banke bus:

a) 9331,2 Lt; b) 10 077,7 Lt?

5. Pagal formulę $S_t = 5000 \cdot 1{,}075^t$ galima apskaičiuoti, iki kiek išaugs indėlis po t metų.

a) Kokio dydžio indėlis buvo padėtas į banką?
b) Kokia banko sudėtinių palūkanų norma?
c) Apskaičiuokite, iki kiek išaugs indėlis po 1; 2; 3; 4; 5 metų.
d) Kiek už indėlį bus priskaičiuota sudėtinių palūkanų po 7 metų; 9 metų?

6. Raskite sudėtines palūkanas, kurios gaunamos per 3 metus padėjus į banką 5000 Lt sumą su 12% palūkanų norma, jeigu palūkanos skaičiuojamos kas:

a) pusmetį; b) ketvirtį; c) keturis mėnesius; d) du mėnesius.

7. 6000 Lt paskola turi būti grąžinta per 3 metus lygiomis dalimis su kasmetinėmis 12% mažėjančiomis palūkanomis.

a) Kokia kasmetinė paskolos grąžinimo suma?
b) Kiek metinių palūkanų reikės mokėti už pirmus; antrus; trečius metus?

8. 6000 Lt paskola turi būti grąžinta per 4 metus lygiomis dalimis su kasmetinėmis 12% mažėjančiomis palūkanomis. Sudarykite paskolos grąžinimo planą.

9. 8000 Lt paskola turi būti grąžinta per 5 metus lygiomis dalimis su kasmetinėmis 15% mažėjančiomis palūkanomis. Sudarykite paskolos grąžinimo planą.

10. Prekė atpigo du kartus po 8%. Dabar ji kainuoja 126,96 Lt.

a) Kiek kainavo prekė iš pradžių?
b) Kiek iš viso procentų atpigo prekė?
c) Kiek kainavo prekė po pirmojo kainos sumažinimo?
d) Kiek kainuotų prekė jos dabartinę kainą sumažinus dar du kartus po 8%?

11. Aparatas, pirktas už 400 Lt, kasmet nuvertėja po 15%.

a) Kokia bus aparato vertė po 4 metų; 5 metų?
b) Kiek iš viso procentų nuvertės aparatas per 4 metus; 5 metus?

12. Kasmet ravint tam tikros rūšies piktžoles dirvoje pavyksta sumažinti 50% nuo likusio jų kiekio. Kiek piktžolių liks po 5 metų, jei dabar jų yra:

a) 1 000 000; b) 200 000?

13. Šeima, laimėjusi 25 000 Lt, nutarė kasmet išleisti 20% likutinės laimėjimo sumos. Kiek litų galės išleisti šeima:

a) trečiaisiais metais; b) ketvirtaisiais metais?

14. Tam tikros rūšies paukščių skaičius kasmet padidėja tris kartus. Pirmą kartą skaičiuojant buvo 2000 paukščių. Kiek šių paukščių bus po:

a) 4 metų; b) 6 metų?

15. Darbuotojo atlyginimas sausio mėnesį buvo 750 Lt. Kiek iš viso uždirbo darbuotojas (lito tikslumu) per pusę metų, jei kas mėnesį darbuotojo atlyginimas didėjo po:

a) 3%; b) 4%?

16. Šeima sausio mėnesį sutaupė 200 Lt. Kiekvieną kitą kalendorinių metų mėnesį šeimos sutaupytos sumos didėjo vis tuo pačiu procentu, ir kovo mėnesį šeima sutaupė 204,02 Lt. Kiek litų (lito tikslumu) sutaupė šeima:

a) rugsėjo mėn.
b) gruodžio mėn.
c) per tris metų ketvirčius
d) per metus?

17. Išspręskite lygtį:

a) $x^2 + 12x = 0$
b) $3x^2 - x = 0$
c) $x^2 - 7x - 60 = 0$
d) $x^2 + 5x - 24 = 0$

18. Išspręskite nelygybių sistemą:

a) $\begin{cases} 4 - x < 1, \\ 4 > 2x \end{cases}$
b) $\begin{cases} 3 - 5x > x + 7, \\ 2x + 1 < x + 2 \end{cases}$

19. Apskaičiuokite:

a) $(\sqrt{5} - 2)(\sqrt{5} + 2)$
b) $5^{-1} - (-3)^{-2}$
c) $-3^{-2} + 4^{-1}$
d) $3^{-2} \cdot 3^4 \cdot 2^0 \cdot 9$

2 FUNKCIJŲ GRAFIKAI

1. Funkcija $f(x) = ax^3$ 36
2. Funkcijos $f(x) = \sqrt{x}$ ir $g(x) = \sqrt[3]{x}$ 44
3. Funkcijos $y = |f(x)|$ grafikas 48
4. Grafikų transformacijos 54
Pasitikrinkite 61

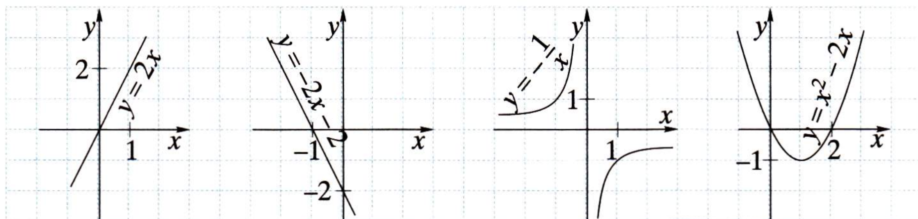


1 Funkcija $f(x) = ax^3$

Anksčiau nagrinėjome funkcijas, kurių pavidalas yra:

$$f(x) = kx, \quad f(x) = kx + b, \quad f(x) = \frac{k}{x}, \quad f(x) = ax^2 + bx + c.$$

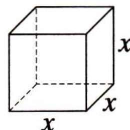
Pateikiame keletą tokių funkcijų grafikų pavyzdžių:



Šiame skyrelyje nagrinėsime funkcijas, kurių pavidalas yra

$$f(x) = ax^3; \quad \text{čia } x \text{ — nepriklausomas kintamasis,}$$
$$a \text{ — skaičius } (a \neq 0).$$

Pavyzdžiui, tokio pavidalo formule užrašoma kubo tūrio V priklausomybė nuo jo briaunos ilgio x: $V = x^3$. (Šiuo atveju $a = 1$.)



1 užduotis. Formule užrašykite rutulio tūrio V priklausomybę nuo jo spindulio ilgio R ir nurodykite, kam lygus koeficientas a.

Kadangi reiškinys ax^3 turi prasmę su visomis kintamojo x reikšmėmis, tai funkcijos $f(x) = ax^3$ apibrėžimo sritis yra realiųjų skaičių aibė, t. y. $D(f) = (-\infty; +\infty)$.

Kadangi

$$f(-x) = a(-x)^3 = -ax^3 = -f(x),$$

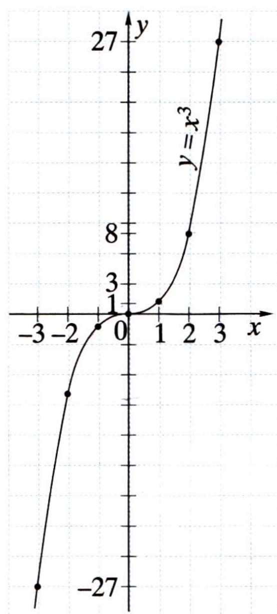
tai funkcija yra *nelyginė*, o jos grafikas yra simetriškas koordinačių pradžios taško atžvilgiu.

Funkcija $f(x) = x^3$

Tai atskiras funkcijos $f(x) = ax^3$ atvejis, kai $a = 1$.
Nubraižykime funkcijos $f(x) = x^3$ grafiką.
Sudarykime funkcijos reikšmių lentelę:

x	...	-3	-2	-1	0	1	2	3	...
$y = x^3$	...	-27	-8	-1	0	1	8	27	...

Koordinačių plokštumoje pažymėkime taškus, kurių koordinatės surašytos lentelėje, ir per juos glodžiai brėžkime kreivę:



Kuo daugiau taškų pažymėtume, tuo tikslesnė būtų kreivė. Gautoji kreivė vadinama *kubine parabole*.
Kubinė parabolė yra simetriška koordinačių pradžios taško atžvilgiu.

? Kokia funkcijos $f(x) = x^3$ reikšmių sritis? Su kuriomis x reikšmėmis funkcija įgyja teigiamas reikšmes, neigiamas reikšmes; didėja, mažėja?

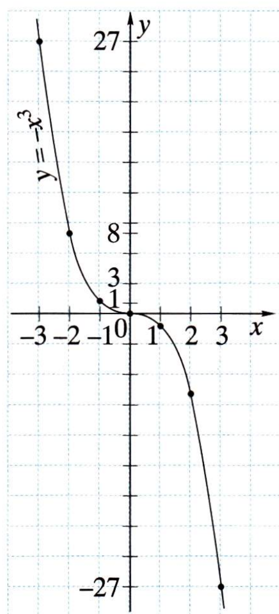
Kubine parabole vadiname bet kokios funkcijos $f(x) = ax^3$, $a \neq 0$, grafiką.

2 užduotis. Nubraižykite grafikus funkcijų $g(x) = 2x^3$ ir $h(x) = \frac{1}{2}x^3$.
Išvardykite funkcijos $f(x) = ax^3$, kai $a > 0$, savybes.

Funkcija $f(x) = -x^3$

Tai atskiras funkcijos $f(x) = ax^3$ atvejis, kai $a = -1$.
Nubraižykime funkcijos $f(x) = -x^3$ grafiką.

x	...	-3	-2	-1	0	1	2	3	...
$y = -x^3$	...	27	8	1	0	-1	-8	-27	...

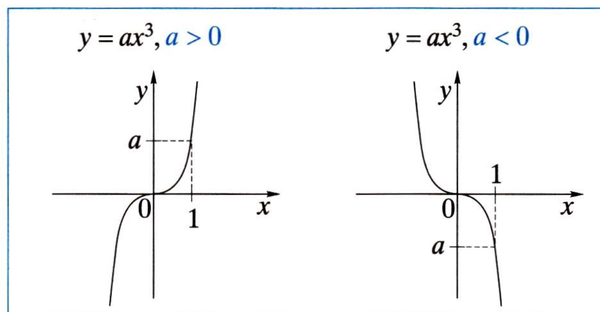




Kokia funkcijos $f(x) = -x^3$ reikšmių sritis? Su kuriomis x reikšmėmis funkcija įgyja teigiamas reikšmes, neigiamas reikšmes; didėja, mažėja?

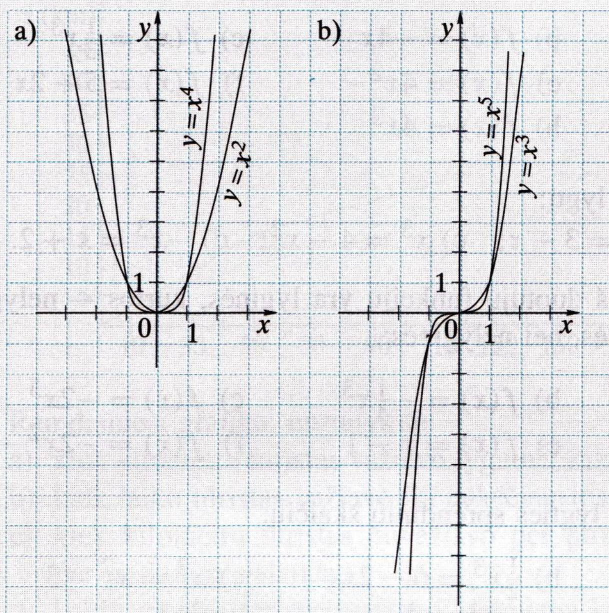
3 užduotis. Nubraižykite grafikus funkcijų $g(x) = -2x^3$ ir $h(x) = -\frac{1}{2}x^3$. Išvardykite funkcijos $f(x) = ax^3$, kai $a < 0$, savybes.

Kai $a > 0$, kubinė parabolė yra I ir III ketvirčiuose, kai $a < 0$ — II ir IV ketvirčiuose.



Funkcija $f(x) = x^n, n \in N$

Funkcija $f(x) = x^n$, kai n — natūralusis skaičius, vadinama *laipsnine funkcija su natūraliuoju rodikliu.* Jau nagrinėjome laipsnines funkcijas, kai $n = 1, 2, 3$, t. y. $f(x) = x$, $f(x) = x^2$ ir $f(x) = x^3$.
Vienoje koordinačių plokštumoje nubraižykime grafikus laipsninių funkcijų imdami lygines n reikšmes, pavyzdžiui, $n = 2; 4$ (žr. a) pav); kitoje koordinačių plokštumoje — imdami nelygines n reikšmes, pavyzdžiui, $n = 3; 5$ (žr. b) pav).



Laipsninės funkcijos $f(x) = x^n$, $n \in N$, grafikas, kai n — lyginis skaičius didesnis už 2, primena parabolę $y = x^2$; kai n — nelyginis skaičius didesnis už 3, — kubinę parabolę $y = x^3$.

Kai n lyginis skaičius, tai $f(-x) = (-x)^n = x^n = f(x)$ — funkcija yra lyginė, o jos grafikas simetriškas ordinačių ašies atžvilgiu.
Funkcijos reikšmių sritis — neneigiami skaičiai: $E(f) = [0; +\infty)$.

Kai n nelyginis skaičius, tai $f(-x) = (-x)^n = -x^n = -f(x)$ — funkcija yra nelyginė, o jos grafikas simetriškas koordinačių pradžios taško atžvilgiu.
Funkcijos reikšmių sritis — realiųjų skaičių aibė: $E(f) = (-\infty; +\infty)$.

4 užduotis. Nurodykite daugiau laipsninės funkcijos su natūraliuoju rodikliu savybių.

Pratimai ir uždaviniai

86. Nubraižykite grafiką funkcijos:
a) $f(x)=\frac{1}{4}x^3$; b) $f(x)=-\frac{1}{2}x^3$; c) $f(x)=-\frac{2}{3}x^3$; d) $f(x)=\frac{1}{3}x^3$.

87. Raskite koeficiento k reikšmę, jeigu žinoma, kad kubinė parabolė $y=kx^3$ eina per tašką M:
a) $M(2;16)$; b) $M(3;-54)$; c) $M\left(\frac{2}{3};24\right)$; d) $M\left(-\frac{1}{3};2\right)$.

88. Nustatykite, kurios iš duotųjų funkcijų didėja visoje apibrėžimo srityje:

a) $f(x)=2x^3$ b) $f(x)=-4x$ c) $f(x)=\frac{1}{3}x^3$
d) $f(x)=-x^3$ e) $f(x)=4x^2$ f) $f(x)=5+2x$
g) $f(x)=2-3x$ h) $f(x)=4x^3$

89. Grafiškai išspręskite lygtį:
a) $x^3=5$; b) $\frac{1}{2}x^3=3-x$; c) $x^3=4-x^2$; d) $-x^3=x+2$.

90. Nustatykite, kurios iš duotųjų funkcijų yra lyginės, kurios — nelyginės, kurios nėra nei lyginės, nei nelyginės:

a) $f(x)=2x^3$ b) $f(x)=-\frac{1}{4}x^3$ c) $f(x)=-2x^3$
d) $f(x)=4-x^2$ e) $f(x)=x-1$ f) $f(x)=-2x^2-1$

91. Grafiškai nustatykite lygties sprendinių skaičių:

a) $x^3=-\frac{1}{x}$ b) $\frac{1}{2}x^3=6-2x$ c) $x^3=x^2-3$
d) $2x^3=3-\frac{1}{2}x^2$ e) $-x^3=\frac{3}{x}$ f) $\frac{2}{3}x^3=x$

92. Grafiškai išspręskite nelygybę:

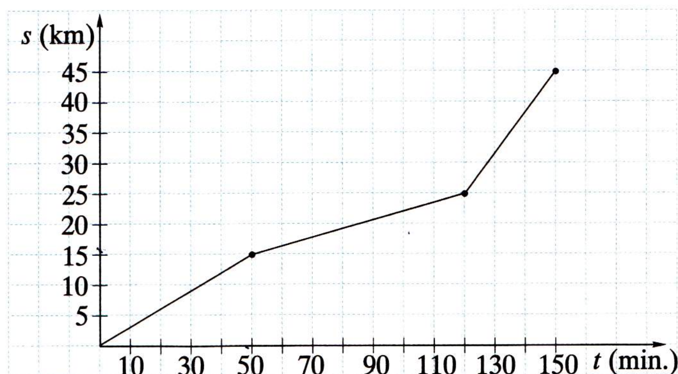
a) $x^3>1$ b) $-x^3<8$ c) $\frac{1}{2}x^3>4$
d) $\frac{2}{3}x^3>3-x$ e) $x^3<x^2+1$ f) $\frac{1}{4}x^3>4-x$
g) $\frac{3}{4}x^3<3x$ h) $-\frac{1}{4}x^3>-x$

93. a) Remdamiesi funkcijų $f(x)=x^3$ ir $g(x)=x^2$ savybėmis, didėjimo tvarka išdėstykite skaičius:
$-0{,}9$; $-0{,}5$; $0{,}2$; $1{,}2$; $(-0{,}5)^2$; $(0{,}9)^2$; $(1{,}2)^2$; $(3{,}5)^2$; $(-0{,}5)^3$; $(-0{,}9)^3$; $(0{,}2)^3$; $(1{,}2)^3$.
b) Remdamiesi funkcijų $f(x)=x^3$ ir $g(x)=x^2$ savybėmis, mažėjimo tvarka išdėstykite skaičius:
$-0{,}13$; $0{,}7$; $2{,}6$; $(-0{,}7)^2$; $(-2{,}6)^2$; $(0{,}7)^3$; $(-0{,}13)^3$; $(2{,}6)^3$.

94. Raskite n, jei žinoma, kad funkcijos $f(x) = x^n$ grafikas eina per tašką:
a) $M(2; 32)$; b) $M(4{,}5; 20{,}25)$; c) $M(-2; 16)$; d) $M(-4; -64)$.

95. Nubrėžkite tiesę, kuri eitų per tašką $M(3; 2)$, o tiesės krypties koeficientas k būtų lygus:
a) 1; b) -2; c) 3; d) 0; e) $\frac{1}{2}$.

96. Pavaizduotas turisto kelionės dviračiu grafikas. Dalį kelio turistas važiavo lyguma, dalį — kilo į kalną, dalį — leidosi nuo kalno. Turistas visą kelią nuvažiavo per 2 h 30 min.



Remdamiesi grafiku, nustatykite:
a) kiek kilometrų turistas važiavo lyguma; kilo į kalną; leidosi nuo kalno;
b) kiek laiko turistas važiavo iki aukščiausios kelio vietos;
c) kiek kilometrų turistas nuvažiavo per pirmąsias pusantros valandos; per paskutinę valandą;
d) kokiu greičiu turistas važiavo kiekvieną kelio dalį: lyguma; į kalną; nuo kalno;
e) vidutinį kelionės greitį.

97. Duota funkcija $f(x) = \frac{1}{x}$. Įrodykite, kad yra teisinga lygybė:
a) $f(1) - f(2) = f(1) \cdot f(2)$;
b) $f(2) - f(3) = f(2) \cdot f(3)$;
c) $f(10) - f(11) = f(10) \cdot f(11)$;
*d) $f(n) - f(n+1) = f(n) \cdot f(n+1)$.

98. Duotos funkcijos $f(x) = \frac{x^2 - x}{2}$ ir $g(x) = \frac{x - x^2}{2}$. Įrodykite, kad yra teisinga lygybė:

a) $f(3) + g(-1) = 2$
b) $f(7) + g(-5) = 6$
c) $f(-5) + g(6) = 0$
d) $f(-2) + g(3) = 0$
*e) $f(1 + x) + g(1 - x) = x$
*f) $f(-x) + g(1 + x) = 0$

99. Nebraižydami funkcijos grafiko raskite koordinates taškų, kuriuose grafikas kerta koordinačių ašis:

a) $f(x) = 6x - 4$ b) $f(x) = 2x^2 + 2x - 4$
c) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x + 3$ d) $f(x) = x^2 - 8x + 14$
e) $f(x) = 4x^2 - 12x + 9$ f) $f(x) = \frac{3}{x-2}$

100*. a) Įrodykite, kad funkcija $f(x) = 3x + 7$ didėja visoje apibrėžimo srityje.
b) Įrodykite, kad funkcija $f(x) = 4 - 5x$ mažėja visoje apibrėžimo srityje.
c) Įrodykite, kad funkcija $f(x) = x^2 - 4x + 7$ intervale $(-\infty; 2)$ mažėja, o intervale $(2; +\infty)$ — didėja.

Pavyzdys. Įrodykite, kad funkcija $f(x) = 6 - 11x$ mažėja visoje apibrėžimo srityje.
Sprendimas. Reikia įrodyti, kad didesnę argumento reikšmę atitinka mažesnė funkcijos reikšmė.
Tarkime, kad $x_2 > x_1$, ir nagrinėkime atitinkamų funkcijos reikšmių skirtumą: $f(x_2) - f(x_1) = 6 - 11x_2 - (6 - 11x_1) = 6 - 11x_2 - 6 + 11x_1 =$ $= -11(x_2 - x_1) < 0$, nes $x_2 - x_1 > 0$, kai $x_2 > x_1$.
Kadangi $f(x_2) - f(x_1) < 0$, tai $f(x_2) < f(x_1)$, kai $x_2 > x_1$. Vadinasi, funkcija mažėja.

---

101. Į banką, kuris skaičiuoja 8% metinių sudėtinių palūkanų, padėtas 2000 Lt indėlis. Po dvejų metų indėlis priaugo iki 2332,8 Lt. Iki kokios sumos išaugs indėlis po:
a) 3 metų; b) 4 metų; c) 5 metų; d) 6 metų?

102. Ūkininkas apdraudė nuo stichinės nelaimės ir gaisro savo namo turtą 15 000 Lt sumai, sumokėdamas 0,71% draudimo sumos, ir ūkinio pastato turtą 12 000 Lt sumai, sumokėdamas 1,03% draudimo sumos. Kiek kainavo draudimas ūkininkui?

103. Už 57,5 tonos tepalų sumokėtas 13 800 Lt akcizo mokestis. Koks vienos tonos tepalų akcizo mokesčio tarifas ir kiek litų reikėtų sumokėti akcizo už:
a) 76,2 tonos; b) 104,5 tonas tepalų?

104. Užpildykite lentelę:

	Prekės mažmeninė kaina (Lt)	PVM (Lt)	Prekės kaina be PVM (Lt)
a)	15,25		
b)		15,25	
c)			15,25
d)	199,99		

105. Akcija, kurios kursas 4% didesnis už nominaliąją vertę, šiandien parduodama už:
a) 52 Lt; b) 31,2 Lt.
Kokia akcijos nominalioji vertė?

106. Kūgio sudaromoji lygi 13 dm, o kūgio aukštinės ir jo pagrindo spindulio skirtumas — 7 dm. Apskaičiuokite kūgio:
a) viso paviršiaus plotą; b) tūrį.

107*. Į kampą, kurio didumas lygus 50°, įbrėžtas apskritimas. Kampo kraštinių ir apskritimo bendri taškai dalija apskritimą ir du lankus. Per vieną tašką priklausantį mažesniajam lankui, nubrėžta apskritimo liestinė. Kokio didumo kampu iš apskritimo centro matoma nubrėžtos liestinės dalis, esanti tarp kampo kraštinių?

108. Ar panašūs trikampiai, kurių kraštinių ilgiai yra:
a) 4 dm, 3 dm, 2 dm ir 16 cm, 10 cm, 12 cm;
b) 12 cm, 16 cm, 18 cm ir 2,7 m, 2,4 m, 1,8 m?

109. Išspręskite lygčių sistemą:
a) $\begin{cases} 2x + y = 8, \\ 3x + 4y = 7; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x + 3y = -4, \\ 5x + 6y = 4. \end{cases}$

110. Parašykite trupmeniniu reiškiniu:

a) $\frac{1}{a} : b$ b) $c : \frac{1}{a}$ c) $\frac{1}{x} \cdot y$ d) $2 \cdot \frac{1}{a}$
e) $\frac{2}{x^2} - \frac{3}{x}$ f) $\frac{5}{a^2} + \frac{2}{a^3}$ g) $a + \frac{1}{b}$ h) $\frac{1}{x} - x$

111. Trupmenos vardiklis 5 vienetais didesnis už skaitiklį. Jeigu trupmenos skaitiklį ir vardiklį sumažintume vienetu, ji būtų lygi $\frac{1}{2}$. Raskite tą trupmeną.

112. Pirmoje dėžutėje yra 10 baltų ir 8 žali rutuliai, o antroje — 14 baltų ir 10 žalių rutulių.
a) Kokia tikimybė atsitiktinai ištraukti žalią rutulį iš pirmos dėžutės?
b) Kokia tikimybė atsitiktinai ištraukti žalią rutulį iš antros dėžutės?
c) Iš kurios dėžutės ištraukti baltą rutulį tikimybė yra didesnė?

113. Kiek daugiausia šeštadienių gali būti keliamaisiais metais?
A 51 **B** 52 **C** 53 **D** 54 **E** neįmanoma suskaičiuoti

2 Funkcijos $f(x) = \sqrt{x}$ ir $g(x) = \sqrt[3]{x}$

Funkcija $f(x) = \sqrt{x}$

Prisiminkime kvadratinės šaknies apibrėžimą:

Kvadratine šaknimi iš ***neneigiamo*** *skaičiaus a vadinamas toks* ***neneigiamas*** *skaičius, kurio kvadratas lygus a.*

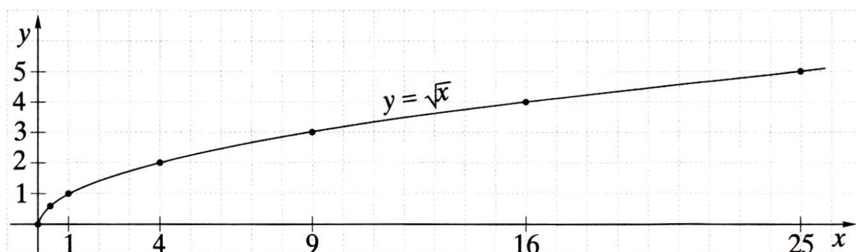
Pavyzdžiui:

$\sqrt{4} = 2$, nes $2^2 = 4$ ir 2 yra neneigiamas skaičius;
$\sqrt{9} = 3$, nes $3^2 = 9$ ir 3 yra neneigiamas skaičius.

Kvadratinė šaknis iš neigiamų skaičių neturi prasmės, nes nėra tokio skaičiaus, kurį pakėlę kvadratu gautume neigiamą skaičių.
Funkcijos $f(x) = \sqrt{x}$ apibrėžimo sritį sudaro neneigiami skaičiai, t. y. $D(f) = [0; +\infty)$.
Imdami „patogias“ x reikšmes sudarykime funkcijos $f(x) = \sqrt{x}$, $x \geqslant 0$, reikšmių lentelę:

x	0	$\frac{1}{4}$	1	9	16	25	$\cdots$
$y = \sqrt{x}$	0	$\frac{1}{2}$	1	3	4	5	$\cdots$

Koordinačių plokštumoje pažymėkime taškus, kurių koordinatės surašytos lentelėje, ir per juos glodžiai brėžkime kreivę:



Funkcija $f(x) = \sqrt{x}$ didėja visoje apibrėžimo srityje.
Funkcijos reikšmių sritis — visi neneigiami skaičiai, t. y. $E(f) = [0; +\infty)$.

Funkcija $g(x) = \sqrt[3]{x}$

Prisiminkime kubinės šaknies apibrėžimą:

Kubine šaknimi iš skaičiaus a vadinamas skaičius, kurio kubas lygus a.

Pavyzdžiui: $\sqrt[3]{8} = 2$, nes $2^3 = 8$; $\sqrt[3]{-8} = -2$, nes $(-2)^3 = -8$.

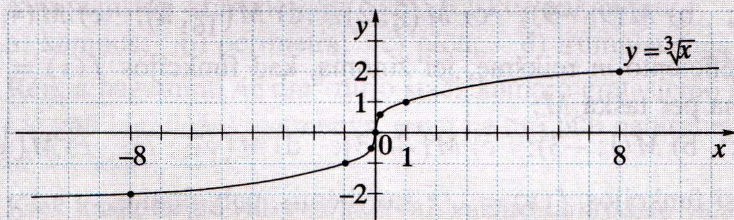
Funkcijos $g(x) = \sqrt[3]{x}$ apibrėžimo sritis — realiųjų skaičių aibė, t. y. $D(g) = (-\infty; +\infty)$.

Kadangi $g(-x) = \sqrt[3]{-x} = -\sqrt[3]{x} = -g(x)$, tai funkcija yra nelyginė, o jos grafikas yra simetriškas koordinačių pradžios taško atžvilgiu.

Imdami „patogias" x reikšmes, sudarykime funkcijos $g(x) = \sqrt[3]{x}$ reikšmių lentelę:

x	...	-8	-1	$-\frac{1}{8}$	0	$\frac{1}{8}$	1	8	...
$y = \sqrt[3]{x}$	...	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2	...

Koordinačių plokštumoje pažymėkime taškus, kurių koordinatės surašytos lentelėje, ir per juos glodžiai brėžkime kreivę:



Funkcijos $g(x) = \sqrt[3]{x}$ reikšmių sritis — realiųjų skaičių aibė, t. y. $E(g) = (-\infty; +\infty)$.

Užduotis. Įrodykite, kad funkcija $g(x) = \sqrt[3]{x}$ didėja visoje apibrėžimo srityje.

Pratimai ir uždaviniai

114. Nubraižykite funkcijos $y = f(x)$ grafiką, jei:

a) $f(x) = 3\sqrt{x}$ b) $f(x) = -2\sqrt{x}$ c) $f(x) = \frac{2}{3}\sqrt{x}$
d) $f(x) = \sqrt{-x}$ e) $f(x) = 3\sqrt[3]{x}$ f) $f(x) = -2\sqrt[3]{x}$
g) $f(x) = 4\sqrt[3]{x}$ h) $f(x) = \sqrt[3]{-x}$

115. Grafiškai išspręskite lygtį:

a) $\sqrt{x} = 5 - x$ b) $3\sqrt{x} = x^3$ c) $\sqrt{x} = x - 3$
d) $2\sqrt{x} = x^2$ e) $\sqrt[3]{x} = 3 - x$ f) $\sqrt[3]{x} = 2 - x^2$
g) $2\sqrt[3]{x} = x - 2$ h) $\sqrt[3]{x} = x^3$

116. Grafiškai nustatykite lygties sprendinių skaičių:

a) $3\sqrt{x} = \frac{2}{x}$ b) $-\sqrt{x} = 4 - x^2$ c) $2\sqrt{x} = \frac{1}{4}x^3$
d) $-2\sqrt{x} = \frac{2}{x}$ e) $\sqrt[3]{x} = 1 - x^2$ f) $2\sqrt[3]{x} = x^2 - 2x$
g) $x^2 - 2x + 1 = 3\sqrt[3]{x}$ h) $2\sqrt[3]{x} = x^2 - 3x - 4$

117. Raskite koeficiento k reikšmę, jei žinoma, kad funkcijos $f(x) = k\sqrt{x}$ grafikas eina per tašką M:
a) $M(4; 4)$; b) $M(9; -9)$; c) $M\left(\frac{4}{9}; 2\right)$; d) $M\left(\frac{1}{16}; 5\right)$; e) $M(4; 3)$.

118. Raskite koeficiento m reikšmę, jei žinoma, kad funkcijos $f(x) = m\sqrt[3]{x}$ grafikas eina per tašką M:
a) $M(8; 8)$; b) $M(1; -3)$; c) $M\left(\frac{8}{27}; 3\right)$; d) $M\left(\frac{64}{125}; 7\right)$; e) $M\left(\frac{125}{216}; 5\right)$.

119. Remdamiesi funkcijos $f(x) = \sqrt{x}$ savybėmis, palyginkite:

a) $f\left(\frac{5}{8}\right)$ ir $f\left(\frac{2}{3}\right)$ b) $f\left(\frac{4}{7}\right)$ ir $f\left(\frac{3}{5}\right)$
c) $f\left(\frac{6}{13}\right)$ ir $f(0{,}4)$ d) $f\left(\frac{5}{6}\right)$ ir $f\left(\frac{7}{8}\right)$

120. Remdamiesi funkcijos $f(x) = \sqrt[3]{x}$ savybėmis palyginkite:

a) $f\left(\frac{2}{3}\right)$ ir $f\left(\frac{3}{5}\right)$ b) $f\left(-\frac{3}{7}\right)$ ir $f\left(-\frac{2}{5}\right)$
c) $f\left(-\frac{4}{7}\right)$ ir $f(0{,}53)$ d) $f\left(\frac{5}{7}\right)$ ir $f\left(\frac{9}{13}\right)$

121. Grafiškai išspręskite nelygybę:

a) $\sqrt{x} > 2$ b) $\sqrt[3]{x} < 2$ c) $2\sqrt{x} > x - 4$
d) $2\sqrt[3]{x} > \frac{3}{x}$ e) $\sqrt{x} < x$ f) $\frac{1}{4}x^3 < 2\sqrt[3]{x}$
g) $\frac{3}{4}x^3 > 2\sqrt{x}$ h) $-\frac{1}{4}x^3 > -\sqrt{x}$

122. Stačiakampio gretimos kraštinės apytiksliai lygios 14,0 m ir 6,5 m. Raskite kvadrato, kurio plotas lygus to stačiakampio plotui, kraštinės ilgį.

123. Kubo tūris $V \approx 5160\,\text{cm}^3$. Raskite jo briauną.

124. Iš skardos reikia pagaminti kubo formos baką, kuriame tilptų apytiksliai $300\,\ell$ vandens. Raskite kubo briaunos ilgį (0,1 m tikslumu).

125. Rutulio tūris skaičiuojamas pagal formulę $V = \frac{4}{3}\pi R^3$, kur V — rutulio tūris, R — rutulio spindulys, $\pi \approx 3{,}14$. Raskite spindulį rutulio, kurio tūris būtų $254\,\text{cm}^3$.

126. Išspręskite lygčių sistemą:

a) $\begin{cases} \frac{x}{y} - \frac{y}{x} = \frac{5}{6}, \\ x + y = 5; \end{cases}$ b) $\begin{cases} (x-1)(y+1) = -2, \\ x + y = 1. \end{cases}$

127. Raskite koeficiento k reikšmę, kai žinoma, kad funkcijos $f(x) = kx^2$, $k \neq 0$, grafikas eina per tašką, kurio koordinatės yra:

a) $(-2; -4)$; b) $(1; -1)$; c) $(2; 1)$; *d) $(0; 0)$.

128. Išspręskite lygtį:

a) $x^2 - 1 = 0$; b) $x^2 - 2x = 0$; c) $x^2 - 6x + 8 = 0$; d) $x^2 - 2x + 3 = 0$.

129. Apskaičiuokite: a) $5^{-1} + (-2)^{-2}$; b) $-2^{-2} + 5^0$.

130. Jei $\frac{2}{a+2} = \frac{1}{3}$, tai $\frac{1}{a+1} = \ldots$

131. Trikampio vidaus kampų didumai sutinka kaip 1 : 2 : 3. Šio trikampio trumpiausioji kraštinė lygi 6 cm. Raskite trikampio:

a) kampus; b) perimetrą; c) plotą; d) trumpiausiąją aukštinę.

132. Reikia pagaminti $48\,\text{dm}^3$ tūrio stačiakampio gretasienio formos dėžę. Kokie gali būti dėžės matmenys, jeigu jie turi būti natūralieji skaičiai, didesni už vienetą?

133. Kiek kartų tarp 6 val. ryto ir 6 val. vakaro laikrodžio valandinė ir minutinė rodyklės būna statmenos?

A 2 **B** 6 **C** 12 **D** 22 **E** 24

134. Sumaišyta 20 kg pieno, kurio riebumas 4,5%, ir 30 kg pieno, kurio riebumas 4,2%.

a) Koks pieno mišinio riebumas?

b) Kiek kilogramų vandens reikia įpilti į mišinį, kad naujojo mišinio riebumas būtų 2,5%; 3,2%?

135. Įvykio A tikimybė lygi $0,(3)$. Apskaičiuokite šiam įvykiui priešingo įvykio $\overline{A}$ tikimybę.

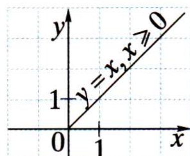
3 Funkcijos $y = |f(x)|$ grafikas

Žinome, kad skaičiaus modulis parodo, kiek tas skaičius skaičių tiesėje yra nutolęs nuo nulio. Kadangi atstumai reiškiami neneigiamais skaičiais, tai $|x| \geqslant 0$. Neneigiamo skaičiaus modulis lygus pačiam skaičiui, o neigiamo skaičiaus modulis lygus jam priešingam skaičiui, t. y.:

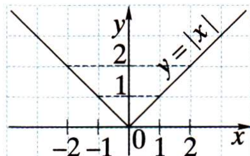
$$|x| = \begin{cases} x, & \text{kai } x \geqslant 0, \\ -x, & \text{kai } x < 0. \end{cases}$$

Nubraižykime funkcijos $f(x) = |x|$ grafiką. Funkcijos apibrėžimo sritis — realiųjų skaičių aibė, t. y. $D(f) = \boldsymbol{R}$, o reikšmių sritis — neneigiami skaičiai, t. y. $E(f) = [0; +\infty)$.
Pastebėkime, kad funkcija $f(x) = |x|$ yra lyginė, nes $f(-x) = |-x| = |x| = f(x)$. Žinome, kad lyginės funkcijos grafikas yra simetriškas y ašies atžvilgiu. Todėl braižyti funkcijos $f(x) = |x|$ grafiką galima taip:

1) Braižome grafiką intervale $[0; +\infty)$. Kadangi $|x| = x$, kai $x \geqslant 0$, tai funkcijos $f(x) = |x|$ grafikas intervale $[0; +\infty)$ sutampa su funkcijos $h(x) = x$ grafiku.

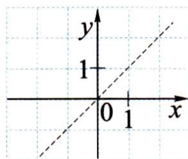


2) Nubrėžtam spinduliui randame spindulį, simetrišką y ašies atžvilgiu.

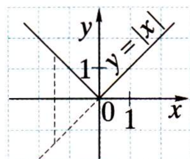


Remiantis modulio apibrėžimu funkcijos $f(x) = |x|$ grafiką galima braižyti ir taip:

1) Brėžiame pagalbinę tiesę $y = x$.



2) Tiesės daliai, esančiai po x ašimi ($x < 0$), braižome spindulį, simetrišką x ašies atžvilgiu. Funkcijos $f(x) = |x|$ grafiką sudaro du spinduliai — pirmojo ir antrojo ketvirčių pusiaukampinės.



Remiantis modulio apibrėžimu

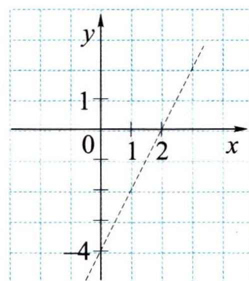
$$|f(x)| = \begin{cases} f(x), & \text{kai } f(x) \geqslant 0, \\ -f(x), & \text{kai } f(x) < 0. \end{cases}$$

Todėl funkcijos $y = |f(x)|$ grafiką galima braižyti taip:

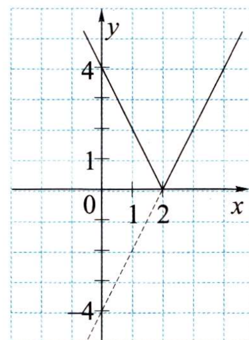
- nubraižome funkcijos $y = f(x)$ grafiką (neryškiai, pagalbine linija);
- braižome grafiką, simetrišką x ašies atžvilgiu tai grafiko daliai, kuri atitinka neigiamas funkcijos reikšmes (yra žemiau x ašies).
  Ne žemiau x ašies esančios dalys sudaro funkcijos $y = |f(x)|$ grafiką.

1 PAVYZDYS. Nubraižykime funkcijos $f(x) = |2x - 4|$ grafiką.

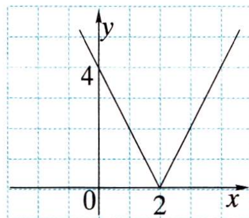
1) Brėžiame pagalbinę tiesę $y = 2x - 4$.



2) Spinduliui, esančiam po x ašimi, brėžiame spindulį, simetrišką x ašies atžvilgiu.



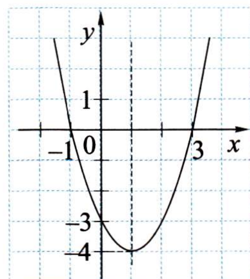
3) Funkcijos $f(x) = |2x - 4|$ grafiką sudaro du spinduliai, turintys bendrą viršūnę ir esantys ne žemiau x ašies.



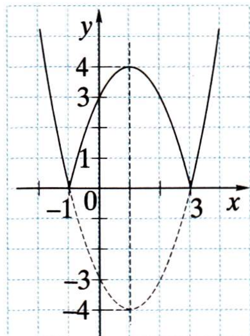
1 užduotis. Nubraižykite funkcijos $f(x) = |-2x + 4|$ grafiką.

2 PAVYZDYS. Nubraižykime funkcijos $f(x) = |x^2 - 2x - 3|$ grafiką.

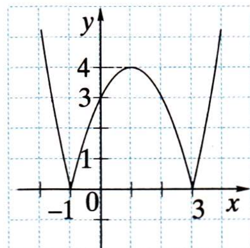
1) Brėžiame parabolę $y = x^2 - 2x - 3$.



2) Parabolės daliai, esančiai žemiau x ašies, braižome kreivę, simetrišką x ašies atžvilgiu.

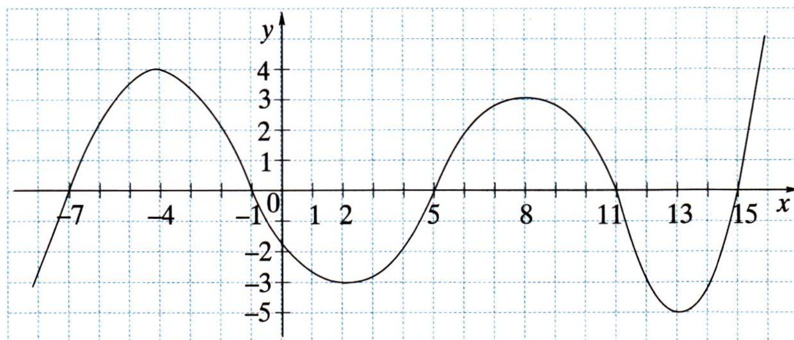


3) Funkcijos $f(x) = |x^2 - 2x - 3|$ grafiką sudaro virš x ašies esanti kreivė.

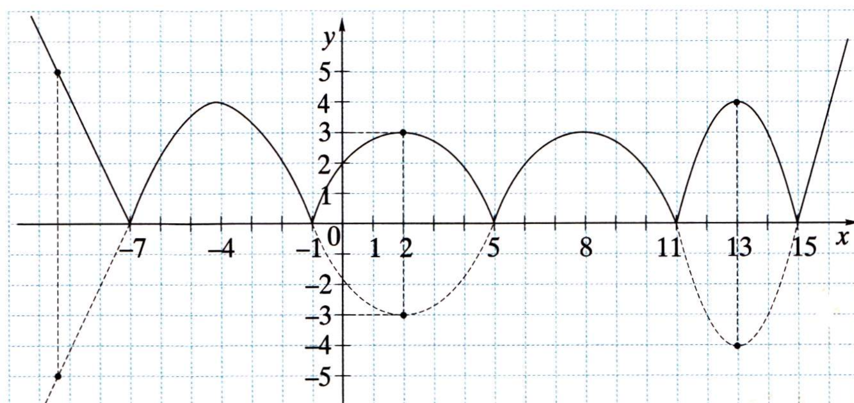


2 užduotis. Nubraižykite funkcijos $f(x) = |-2x^2 - 5x + 3|$ grafiką.

3 PAVYZDYS. Brėžinyje pavaizduotas funkcijos $y = f(x)$ grafikas.

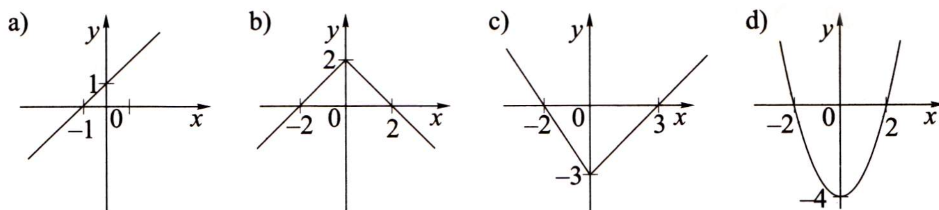


Nubraižykime funkcijos $y = |f(x)|$ grafiką.
Kiekvienai grafiko daliai, esančiai po x ašimi, braižome kreivę, simetrišką x ašies atžvilgiu. Dalys, esančios ne žemiau x ašies, sudaro funkcijos $y = |f(x)|$ grafiką:

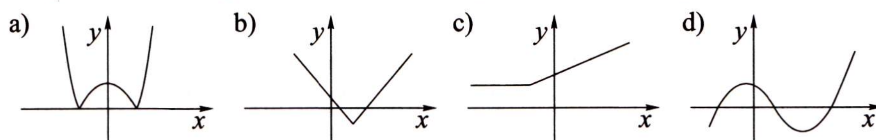


Pratimai ir uždaviniai

136. Nubraižykite funkcijos $y = |f(x)|$ grafiką, kai duotas funkcijos $y = f(x)$ grafikas:



137. Ar gali duotasis grafikas būti funkcijos $y = |f(x)|$ grafiku?



138. Nubraižykite funkcijos $y = |f(x)|$ grafiką, jeigu:

a) $f(x) = 2x + 3$ b) $f(x) = \frac{4}{x}$ c) $f(x) = x^2 - 4$

d) $f(x) = x^2 + 2x - 3$ e) $f(x) = 2x$ f) $f(x) = -\frac{2}{x}$

g) $f(x) = x^3$ h) $f(x) = \sqrt[3]{x}$

139. Grafiniu būdu nustatykite, kiek sprendinių turi lygtis:

a) $|2x-8| = -3x-3$ b) $|-x-4| = 3$ c) $|-x-2| = -x+2$

d) $|x^2-3x-4| = 4$ e) $|x^2-5| = 6-x$ f) $|x^2-2x-8| = 9$

140. Grafiškai išspręskite lygtį:

a) $|x^3| = 8$; b) $\sqrt{x} = |x|$; c) $\left|\frac{4}{x}\right| = 2$; d) $|\sqrt[3]{x}| = x^2$.

141. Grafiškai išspręskite nelygybę:

a) $|x| < 2$ b) $|x| > 4$ c) $|x^3| \leqslant 1$

d) $|x+1| > 5$ e) $|x^2-4| > 1$ f) $|-x^2-2x+3| \geqslant 3$

g) $|x| > x^2$ h) $\left|\sqrt[3]{x}\right| > |x|$

142. Ar funkcija $f(x)$ yra lyginė, jeigu:

a) $f(x) = |x|$ b) $f(x) = \left|\frac{4}{x}\right|$ c) $f(x) = |x^3|$

d) $f(x) = |\sqrt[3]{x}|$ e) $f(x) = |2x-6|$ f) $f(x) = \left|-\frac{2}{3x}\right|$

g) $f(x) = |x^2-1|$ h) $f(x) = |x^2-2x|$?

143*. Ką galima pasakyti apie funkcijų $f(x) = x$, $g(x) = \sqrt{x^2}$, $h(x) = \left(\sqrt{x}\right)^2$, $x \geqslant 0$, grafikus:
A visų trijų funkcijų grafikai sutampa;
B funkcijų $f(x)$ ir $g(x)$ grafikai sutampa;
C funkcijų $f(x)$ ir $h(x)$ grafikai sutampa;
D funkcijų $g(x)$ ir $h(x)$ grafikai sutampa;
E visų trijų funkcijų grafikai skirtingi?

144. Ūkininkas 12 500 Lt padėjo į banką, kuris moka 8,5% metinių sudėtinių palūkanų. Po kelerių metų padėta ūkininko suma priaugs iki:

a) 14715,31 Lt; b) 15966,11 Lt?

145. Žinoma, kad automobilio draudimas nuo:
a) vagystės sudaro 2,45% draudimo sumos;
b) stichinės nelaimės sudaro 0,79% draudimo sumos.
Kokiai sumai kiekvienu atveju žmogus gali apdrausti savo lengvąjį automobilį, jei kiekvienam draudimui jis planuoja išleisti po 150 litų?

146. Alus apmokestinamas 0,4 Lt akcizu už litrą. Koks akcizo mokestis už:

a) 5500 dekalitrų; b) 28,5 kilolitro alaus?

147. Cecho grynasis pelnas 650 Lt. Koks cecho pelnas, jeigu pelno mokesčio tarifas lygus:

a) 29%; b) 24%; c) 10%; *d) $p\%$?

148. Nuomotojas išnuomojo patalpas nuomininkui, sumokėjo PVM ir turi pajamų:

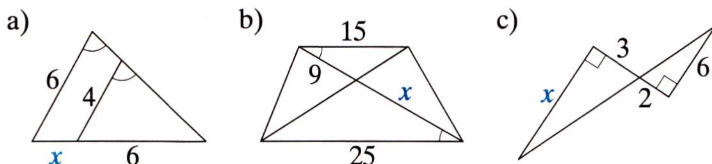
a) 500 Lt; b) 600 Lt.

Kiek litų kainuoja patalpų nuoma nuomininkui?

149. Ritinio aukštinė 3 cm ilgesnė už pagrindo spindulį. Ritinio šoninio paviršiaus plotas lygus 80π cm^2. Raskite ritinio:

a) pagrindo skersmens ilgį; b) tūrį.

150. Raskite x:



151. Apskritimo spindulys lygus 6 cm. Raskite ilgį lanko, atitinkančio centrinį kampą, lygų:

a) 30°; b) 45°; c) 60°; d) 150°; e) 200°.

152. Išspręskite lygtį:

a) $\frac{1}{x-2} = 1$; b) $\frac{x^2-2x+1}{x-1} = 0$.

153. Išspręskite nelygybę:

a) $(3x+5)(3x-5) > (3x-1)^2 + 10$;
b) $(2x+1)^2 \leqslant 4(x-1)(x+1) + 17$.

154. Mokykloje veikia keturios sporto sekcijos — krepšinio, gimnastikos, lengvosios atletikos ir rankinio bei trys menų studijos — choro, dailės ir pramoginių šokių. Darius nori lankyti vieną sporto sekciją ir vieną menų studiją. Kiek pasirinkimo galimybių turi Darius?

155. Apskaičiuokite:

a) $\left(2^{-3}\right)^{-1} + 3^{-4} : 3^{-2}$; b) $-\left(\frac{1}{2}\right)^{-3} + 3^{-1}$; c) $\left(\sqrt{3}\right)^4$; d) $\left(2\sqrt{2}\right)^{-4}$.

156. Andrius užėjo į tirą. Sumokėjo už 5 šūvius. Už kiekvieną taiklų šūvį Andrius buvo premijuotas dviem papildomais šūviais. Iš viso Andrius šovė 17 kartų. Kiek kartų Andrius pataikė?

A 6 **B** 4 **C** 5 **D** 12 **E** 7

4 Grafikų transformacijos

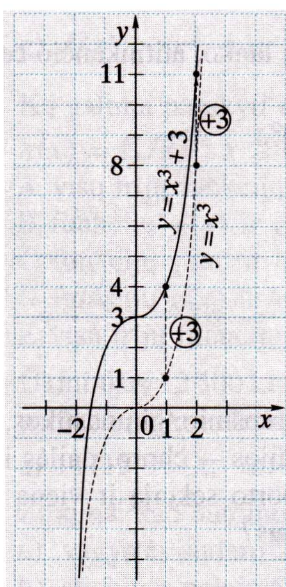
1 PAVYZDYS. Nubraižykime funkcijos $g(x) = x^3 + 3$ grafiką.

Pastebėkime, kad funkcijos $g(x) = x^3 + 3$ reikšmės 3 vienetais didesnės už atitinkamas funkcijos $f(x) = x^3$ reikšmes:

x	...	–3	–2	–1	0	1	2	3	...
$y = x^3$	...	–27	–8	–1	0	1	8	27	...
$y = x^3 + 3$	...	–24	–5	2	3	4	11	30	...

(+3)

Vadinasi, funkcijos $g(x) = x^3 + 3$ grafiko taškų ordinatės yra 3 vienetais didesnės už atitinkamų funkcijos $f(x) = x^3$ grafiko taškų ordinates. Taigi funkcijos $g(x)$ grafiką galima gauti iš funkcijos $f(x)$ grafiko, pastūmus jį aukštyn trimis vienetinėmis atkarpomis.



1 užduotis. Remdamiesi funkcijos $f(x) = x^3$ grafiku nubraižykite funkcijos $g(x) = x^3 - 2$ grafiką.

Funkcijos $y = f(x) + n$ grafiką galima gauti iš funkcijos $y = f(x)$ grafiko, pastūmus jį atstumu $|n|$ aukštyn, kai $n > 0$, arba žemyn, kai $n < 0$.

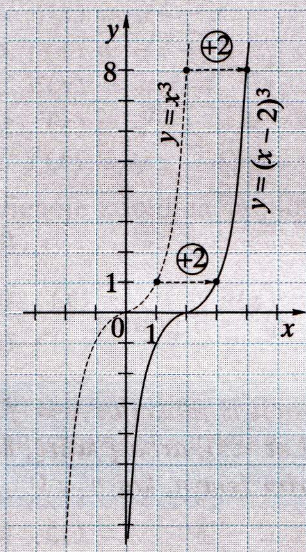
2 PAVYZDYS. Nubraižykime funkcijos $g(x) = (x-2)^3$ grafiką.

Pastebėkime, kad funkcijos $g(x) = (x-2)^3$ reikšmės yra lygios funkcijos $f(x) = x^3$ reikšmėms, kai funkcijos $g(x) = (x-2)^3$ argumento reikšmės yra 2 vienetais didesnės už funkcijos $f(x) = x^3$ argumento reikšmes:

x	...	–3	–2	–1	0	1	2	3	...
$y=x^3$	...	–27	–8	–1	0	1			...
$y=(x-2)^3$	...			–27	–8	–1	0	1	...



Vadinasi, funkcijos $g(x) = (x-2)^3$ grafiko taškų abscisės yra 2 vienetais didesnės už atitinkamas funkcijos $g(x) = x^3$ grafiko taškų abscises. Taigi funkcijos $g(x) = (x-2)^3$ grafiką galima gauti iš funkcijos $f(x) = x^3$ grafiko, pastūmus jį į dešinę dviem vienetinėmis atkarpomis.

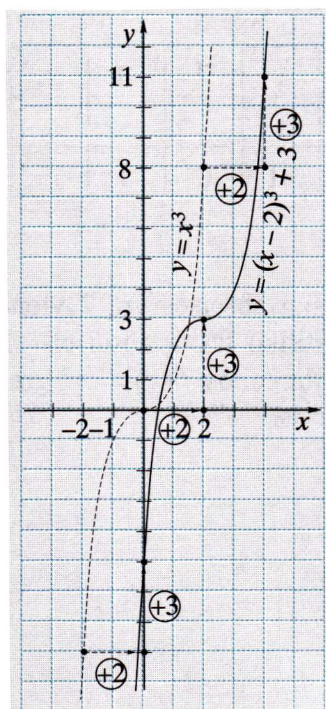


2 *užduotis*. Remdamiesi funkcijos $f(x) = x^3$ grafiku nubraižykite funkcijos $g(x) = (x+3)^3$ grafiką.

Funkcijos $y = f(x+m)$ grafiką galima gauti iš funkcijos $y = f(x)$ grafiko, pastūmus jį atstumu $|m|$ į dešinę, kai $m < 0$, arba į kairę, kai $m > 0$.

3 PAVYZDYS. Nubraižykime funkcijos $g(x) = (x-2)^3 + 3$ grafiką.

Funkcijos $g(x)$ grafiką galima gauti iš funkcijos $f(x) = x^3$ grafiko, pastūmus jį į dešinę dviem ir aukštyn trimis vienetinėmis atkarpomis.

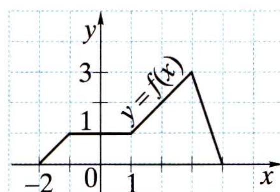


3 užduotis. Nubraižykite funkcijos $f(x) = (x+3)^3 - 2$ grafiką.

Funkcijos $y = f(x+m) + n$ grafiką galima gauti iš funkcijos $y = f(x)$ grafiko, pastūmus jį atstumu $|m|$ į dešinę, kai $m < 0$, arba į kairę, kai $m > 0$, ir atstumu $|n|$ į viršų, kai $n > 0$, arba žemyn, kai $n < 0$.

Pratimai ir uždaviniai

157. Remdamiesi funkcijos $f(x)$ grafiku nubraižykite funkcijos $g(x)$ grafiką, kai:



a) $g(x) = f(x) + 2$;
b) $g(x) = f(x) - 3$;
c) $g(x) = f(x - 2)$;
d) $g(x) = f(x + 3)$;
e) $g(x) = f(x + 2) - 3$;
f) $g(x) = f(x - 1) + 3$;
g) $g(x) = f(x - 2) - 4$.

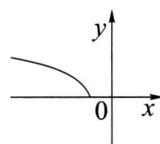
158. Nubraižykite funkcijos $f(x)$ grafiką:

a) $f(x) = \sqrt{x + 3}$ b) $f(x) = \sqrt{x - 2}$ c) $f(x) = \sqrt{x - 2} - 3$

d) $f(x) = x^3 - 3$ e) $f(x) = \frac{1}{2}x^3 + 2$ f) $f(x) = \sqrt[3]{x + 2}$

159. Kurios funkcijos grafikas galėtų būti nubraižytoji kreivė:

A $f(x) = \sqrt{4 - x}$;
B $f(x) = \sqrt{x + 4}$;
C $f(x) = -\sqrt{-4 - x}$;
D $f(x) = \sqrt{-x - 4}$;
E $f(x) = \sqrt{x - 4}$?



160. Vienoje koordinačių plokštumoje nubraižykite funkcijų $f(x)$ ir $g(x)$ grafikus:

a) $f(x) = \sqrt{x}$ ir $g(x) = 2\sqrt{x}$ b) $f(x) = \sqrt{2x}$ ir $g(x) = \sqrt{2(x - 2)}$
c) $f(x) = \sqrt[3]{x}$ ir $g(x) = 2\sqrt[3]{x}$ *d) $f(x) = \sqrt{3x}$ ir $g(x) = \sqrt{3x - 9}$

161. Nurodykite, kaip remiantis funkcijos $f(x) = |x|$ grafiku galima gauti funkcijos $g(x)$ grafiką, jeigu:

a) $g(x) = |x - 3| + 1$ b) $g(x) = |x + 2| - 3$
c) $g(x) = |x - 4| - 2$ d) $g(x) = |x + 4| + 3$

Nubraižykite funkcijos $g(x)$ grafiką.

162. Nurodykite, kaip remiantis funkcijos $f(x) = \frac{1}{x}$ grafiku galima gauti funkcijos $g(x)$ grafiką:

a) $g(x) = \frac{1}{x-1}$ b) $g(x) = \frac{1}{x+2}$
c) $g(x) = \frac{1}{x+2} - 3$ d) $g(x) = \frac{1}{x-1} + 3$

Nubraižykite funkcijos $g(x)$ grafiką.

163. Formule užrašykite funkciją, kurios grafiką gautume, jeigu pastumtume:
a) hiperbolę $y = \frac{6}{x}$ per 3 vienetus į kairę ir 5 aukštyn;
b) kubinę parabolę $y = 4x^3$ per 2 vienetus į dešinę ir per 1 žemyn;
c) kreivę $y = \sqrt{x}$ per 5 vienetus į dešinę ir per 4 aukštyn;
d) grafiką $y = |x|$ per 4 vienetus į kairę ir per 6 žemyn;
e) kreivę $y = \sqrt[3]{x}$ per 1 vienetą į kairę ir per 3 žemyn;
f) hiperbolę $y = -\frac{4}{x}$ per 6 vienetus į dešinę ir per 1 aukštyn.

164. Funkcijos $f(x)$ apibrėžimo sritis yra intervalas $[-4; 6]$. Raskite apibrėžimo sritį funkcijos:
a) $f(x+2)$; b) $f(x-3)$; c) $f(x)+2$;
d) $f(x)-4$; e) $f(x-2)+3$.

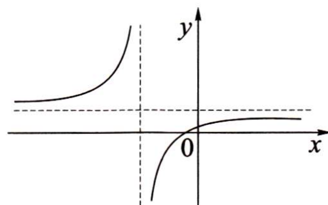
165. Funkcijos $f(x)$ reikšmių sritis yra intervalas $[-6; 3]$. Raskite reikšmių sritį funkcijos:
a) $f(x+2)$; b) $f(x-3)$; c) $f(x)+4$; d) $f(x)-2$; e) $f(x-4)+3$.

166. Duota funkcija $f(x) = \frac{x-3}{x+1}$.
a) Raskite funkcijos $f(x)$ apibrėžimo sritį.
b) Funkciją $f(x)$ užrašę pavidalu $f(x) = -\frac{a}{x+1} + b$, raskite a ir b reikšmes.
c) Nubraižykite funkcijos $f(x)$ grafiką.

167. Duota funkcija $f(x) = \frac{5-x}{x-2}$.
a) Raskite funkcijos $f(x)$ apibrėžimo sritį.
b) Funkciją $f(x)$ užrašę pavidalu $f(x) = \frac{a}{x-2} + b$, raskite a ir b reikšmes.
c) Kokios reikšmės negali įgyti funkcija $f(x)$?
d) Nubraižykite funkcijos $f(x)$ grafiką.

168*. Remdamiesi funkcijos $f(x) = \frac{ax+b}{x+c}$ grafiku nurodykite koeficientų a, b ir c ženklus:

A $a < 0, b > 0, c < 0$;
B $a < 0, b < 0, c > 0$;
C $a < 0, b > 0, c > 0$;
D $a > 0, b > 0, c > 0$;
E $a > 0, b < 0, c < 0$.



Nurodymas. Funkciją užrašykite pavidalu $f(x) = \frac{b-ac}{x+c} + a$, ir pastebėkite, kad $f(0) > 0$.

169*. Duotos funkcijos: $f(x) = x - 1$, $g(x) = \sqrt{(x-1)^2}$, $h(x) = \left(\sqrt{x-1}\right)^2$. Kuris atsakymas yra teisingas:

A visų funkcijų grafikai sutampa;
B funkcijų $f(x)$ ir $g(x)$ grafikai sutampa;
C funkcijų $f(x)$ ir $h(x)$ grafikai sutampa;
D funkcijų $g(x)$ ir $h(x)$ grafikai sutampa;
E visų funkcijų grafikai yra skirtingi?

170. Funkcija $f(x)$ yra didėjanti. Didėjančios ar mažėjančios yra funkcijos:
a) $f(x-2)$; b) $4+f(x)$; c) $-f(x)$; d) $f(x+3)-4$; e) $2-f(x)$?

171. a) Funkcijos $f(x)$ apibrėžimo sritis yra intervalas $[-1; 4]$. Kurios funkcijos apibrėžimo sritis yra intervalas $[-3; 2]$?
b) Funkcijos $f(x)$ reikšmių sritis yra intervalas $[-3; 5]$. Kurios funkcijos reikšmių sritis yra intervalas $[-1; 7]$?

A $f(x+2)$ **B** $f(x-2)$ **C** $f(x)+2$
D $f(x)-2$ **E** $f(x+2)+2$

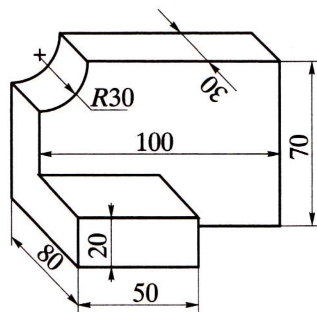
172. Raskite geometrinės progresijos (b_n) pirmųjų aštuonių narių sumą, kai:
a) $b_1 = 0{,}375$, $b_2 = 0{,}75$; b) $b_5 = 1\frac{7}{9}$, $q = \frac{2}{3}$.

173. Užpildykite lentelę:

	Vekselio vertė (Lt)	Diskonto norma (%)	Laikas iki vekselio apmokėjimo (dienos)	Diskonto norma (Lt)	Diskontuoto vekselio kaina (Lt)
a)	1500	8,5	100		
b)	2000	9	75		
c)		9,5	130	61,75	
d)		8	80	22,22	

174. Kvadratinės lygties $x^2 - 10x + c = 0$ mažesnysis sprendinys lygus $x_1 = 4$. Raskite:
a) lygties didesnįjį sprendinį x_2; b) c.

175. Raskite nubraižytos detalės:
a) tūrį; b) viso paviršiaus plotą.



176. Išspręskite lygčių sistemą:

a) $\begin{cases} 3x + 4y = -2, \\ 12x + 16y = -1; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 28x - 35y + 7 = 0, \\ 12x - 15y + 3 = 0. \end{cases}$

177. Įrodykite tapatybę:

a) $\dfrac{\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x}}{\frac{1}{1-x} - \frac{1}{1+x}} = \frac{1}{x}$, $x \neq -1;\ 0;\ 1;$

b) $\dfrac{\frac{x}{x-1} - \frac{x+1}{x}}{\frac{x}{x-1} + \frac{x+1}{x}} = \frac{1}{2x^2-1}$, $x \neq -\frac{\sqrt{2}}{2};\ 0;\ 1;\ \frac{\sqrt{2}}{2}.$

178. Kokiu skaitmeniu baigiasi skaičius 2^{4n+2}, $n \in \boldsymbol{N}$?

179. Mokykloje yra 29 klasės, kuriose iš viso mokosi 730 mokinių. Ar šioje mokykloje yra klasių, kuriose mokosi ne mažiau kaip 26 mokiniai? Kodėl?

180. Trikampio kraštinės lygios 17 cm, 25 cm ir 28 cm. Raskite:
a) atkarpas, į kurias ilgiausią kraštinę dalija į ją nubrėžta aukštinė;
b) aukštinę, nubrėžtą į ilgiausią kraštinę;
c) trikampio plotą;
d) aukštinę, nubrėžtą į 25 cm ilgio kraštinę.

181. Išspręskite nelygybių sistemą:

a) $\begin{cases} -5x - 1 + 2x - 3 > 2, \\ 9x - 4x - 3 < 17; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 6 - 3x + 18 - 8x \leqslant 13, \\ 3x + x - 7 \geqslant 5. \end{cases}$

182. Iš eilės einančių trijų sveikųjų skaičių kvadratų suma lygi 365. Raskite šiuos skaičius.

183. Apskritimu, kurio ilgis 100 m, juda du kūnai. Judėdami ta pačia kryptimi jie susitinka kas 25 sekundės, o judėdami priešinga kryptimi — kas 5 sekundės.
a) Kiek metrų per sekundę priartėja kūnai vienas prie kito judėdami priešingomis kryptimis, t. y. kokia kūnų greičių suma?
b) Kiek metrų per sekundę prisiveja vienas kūnas kitą kūną judėdami ta pačia kryptimi, t. y. koks kūnų greičių skirtumas?
c) Koks kiekvieno kūno judėjimo greitis?

184. Tėvo metų skaičius 5 didesnis už trijų jo sūnų metų sumą. Po 10 metų tėvas bus du kartus vyresnis už savo vyriausiąjį sūnų; po 20 metų — du kartus vyresnis už vidurinįjį sūnų; po 30 metų — du kartus vyresnis už savo jauniausiąjį sūnų. Kiek metų dabar tėvui ir kiekvienam jo sūnui?

Pasitikrinkite

1. Funkcijos $f(x) = kx^3$ grafikas eina per tašką $M(2; 4)$. Raskite koeficiento k reikšmę ir nubraižykite funkcijos grafiką.

2. Nubraižykite funkcijos $f(x) = a\sqrt{x}$ grafiką, jeigu žinoma, kad jis eina per tašką $M\left(\frac{4}{9}; 4\right)$.

3. Raskite koeficiento k reikšmę, jeigu žinoma, kad funkcijos $f(x) = k\sqrt[3]{x}$ grafikas eina per tašką $N(64; 6)$.

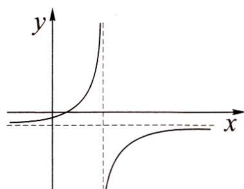
4. Nubraižykite grafiką funkcijos:

a) $f(x) = \frac{2}{3}x^3$ b) $f(x) = -3\sqrt{x}$ c) $f(x) = \frac{3}{2}\sqrt[3]{x}$
d) $f(x) = -\frac{1}{2}x^3$ e) $f(x) = -\frac{5}{2}\sqrt[3]{x}$ f) $f(x) = 1{,}5\sqrt{x}$

5. Grafiškai nustatykite lygties sprendinių skaičių:
a) $\sqrt{x} = \frac{8}{x}$; b) $x^3 = \frac{2}{x}$; c) $\sqrt[3]{x} = 2 - x$.

6. Grafiniu būdu išspręskite nelygybę:
a) $|x - 4| > 2$; b) $|4 - x^2| < 2$; c) $\left|\sqrt[3]{x}\right| > 1$.

7. Pavaizduotas funkcijos $f(x) = \frac{k}{x+a} - 1$ grafikas.



Nurodykite koeficientų a ir k ženklus.

8. Nurodykite, kurios iš duotųjų funkcijų nėra didėjančios:

a) $f(x) = -\frac{1}{x}$, $x > 0$ b) $f(x) = 2x - 5$ c) $f(x) = x^2$, $x > 0$
d) $f(x) = \sqrt{x}$, $x > 0$ e) $f(x) = -x^3$ f) $f(x) = -\sqrt[3]{x}$

9. Su kuriomis koeficiento k reikšmėmis funkcija $f(x) = kx + 7$ mažėja? didėja?

10. Raskite didžiausią arba mažiausią funkcijos $f(x)$ reikšmę:

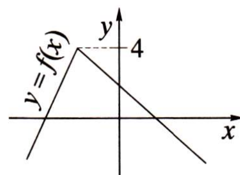
a) $f(x) = 3x^2 - 1{,}5$; b) $f(x) = -\frac{1}{2}(x-4)^2 + 2$.

11. Nurodykite, kurios iš duotųjų funkcijų yra nelyginės:

a) $f(x) = 3x$ b) $f(x) = x^3$ c) $f(x) = \sqrt[3]{x}$
d) $f(x) = 3 + x^2$ e) $f(x) = \sqrt{x}$ f) $f(x) = -\frac{4}{x}$

12. Remdamiesi funkcijos $y = f(x)$ grafiku, nurodykite, kiek sprendinių turi lygtis:

a) $f(x) = 4$; b) $f(x) = 2$.

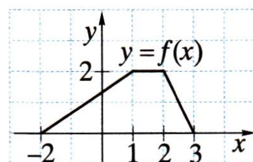


13. Funkcijos $f(x)$ reikšmių sritis yra intervalas $[-5; 7]$. Raskite duotųjų funkcijų reikšmių sritį, jeigu žinoma, kad funkcijos apibrėžtos visoje realiųjų skaičių aibėje:

a) $f(x-4)$; b) $f(x+4)$; c) $f(x)+3$; d) $f(x)-5$; e) $f(x-3)+6$.

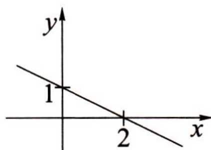
14. Remdamiesi funkcijos $y = f(x)$ grafiku nubraižykite funkcijos $y = g(x)$ grafiką, jei:

a) $g(x) = f(x) - 2$; b) $g(x) = f(x) + 3$;
c) $g(x) = f(x-3)$.

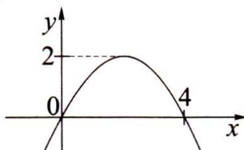


15. Nubraižykite funkcijos $y = |f(x)|$ grafiką, kai duotas funkcijos $y = f(x)$ grafikas:

a)



b)



16. Nubraižykite funkcijos $y = f(x)$ grafiką:

a) $f(x) = |2x + 4|$ b) $f(x) = |x - 4|$
c) $f(x) = |x + 2|$ d) $f(x) = |x - 3|$

17. Nubraižykite funkcijos $y = f(x)$ grafiką:

a) $f(x) = |x + 2|$, $x \in [-7; 7]$;
b) $f(x) = |x| + 2$, $x \in (-5; 2]$;
c) $f(x) = |x - 3|$, $x \in [-4; 4)$.

18. Kiek procentų metinių sudėtinių palūkanų skaičiuoja bankas, jei per dvejus metus banke:

a) 12 000 litų indėlis išaugo į 14126,7 lito sumą;
b) 13 000 litų indėlis išaugo į 15587,33 lito sumą?

19. Kokiai sumai žmogus gali apdrausti savo lengvąjį automobilį, jei jis planuoja išleisti 126 Lt, o lengvojo automobilio draudimas nuo:

a) stichinės nelaimės sudaro 0,81% draudimo sumos;
b) vagystės sudaro 2,43% draudimo sumos?

20. Už 75,6 tonos benzino sumokėtas 91 476 Lt akcizo mokestis. Apskaičiuokite akcizo mokestį už:

a) 57,8 tonos benzino; b) 96,2 tonos benzino.

21. Kiek kainavo pirkinys, jei už jį sumokėtas pridėtosios vertės mokestis sudarė:

a) 3,45 Lt; b) 8,73 Lt?

22. Įmonės grynasis pelnas 750 Lt. Koks įmonės pelnas, jeigu pelno mokesčio tarifas yra:

a) 29%; b) 24%?

23. Už 7500 litų paskolą reikia mokėti metines paprastąsias palūkanas, lygias:

a) 8%; b) 9%.

Parašykite formulę paskolos grąžintinai sumai S (litais) apskaičiuoti priklausomai nuo laiko t (metais).

24. Išspręskite lygčių sistemą:

a) $\begin{cases} 2x + 3y = 1, \\ 4x - 2y = 10; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x - 2y = 8, \\ 4x + 3y = 5. \end{cases}$

25. Suprastinkite trupmeną:

a) $\frac{2\sqrt{45}}{4\sqrt{5}-\sqrt{20}}$; b) $\frac{5\sqrt{12}-4\sqrt{3}}{3\sqrt{27}}$.

26. Išspręskite lygtį:

a) $\frac{x^2}{5} - \frac{2x}{3} = \frac{x-5}{6}$; b) $\frac{x^2}{3} - \frac{3x}{4} = \frac{1-x}{6}$.

27. Stačiojo trikampio statinių ilgių suma lygi 31 cm, o jų ilgių skirtumas lygus 17 cm. Raskite trikampio:

a) statinių ilgius; b) plotą; c) perimetrą;
d) ilgį statmens, nubrėžto iš įžambinės vidurio į ilgesnįjį statinį.

28. Lygiagretainio plotas lygus 120 cm^2, perimetras — 50 cm, o atstumas nuo lygiagretainio simetrijos centro iki ilgesniosios kraštinės — 4 cm. Raskite lygiagretainio:
a) ilgesniąją kraštinę; b) trumpesniąją kraštinę; c) įstrižaines.

29. Trikampio vidaus kampų santykiai 3 : 5 : 7. Kokie yra šio trikampio:
a) priekampių santykiai; b) išorės kampų santykiai?

30. Kūgio aukštinė lygi 12 cm, o kūgio tūris lygus 100π cm^3. Raskite kūgio:
a) pagrindo spindulio ilgį; b) šoninio paviršiaus plotą.

31. Su kuriomis x reikšmėmis reiškinio:
a) x^2 skaitinės reikšmės yra didesnės už reiškinio $(x-2)^2+16$ skaitines reikšmes;
b) $(x-1)^2$ skaitinės reikšmės yra mažesnės už reiškinio $x(x-5)+7$ skaitines reikšmes?

3 LYGČIŲ IR NELYGYBIŲ SISTEMOS

1. Lygčių sistemos, kai viena lygtis yra netiesinė 66
2. Tiesinių nelygybių su dviem kintamaisiais sistemos 74

Pasitikrinkite 79



1 Lygčių sistemos, kai viena lygtis yra netiesinė

Jau mokame spręsti dviejų tiesinių lygčių su dviem nežinomaisiais sistemas. Tiesinių lygčių su dviem nežinomaisiais sistemos sprendiniu vadinama tokia nežinomųjų reikšmių pora, su kuria *kiekviena* sistemos lygtis virsta teisinga lygybe.

Pavyzdžiui, skaičių pora (4; 2) yra lygčių sistemos $\begin{cases} 3x + y = 14, \\ 2x - 3y = 2 \end{cases}$ sprendinys, nes $3 \cdot 4 + 2 = 14$ ir $2 \cdot 4 - 3 \cdot 2 = 2$.

Lygčių sistemas sprendėme grafiniu, keitimo ir sudėties būdais.

Užduotis. Išspręskite lygčių sistemą $\begin{cases} 3x + y = 14, \\ 2x - 3y = 2 \end{cases}$ visais trimis būdais.

Panagrinėkime, kaip sprendžiamos lygčių sistemos, kurių viena lygtis yra tiesinė, o kita — netiesinė, pavyzdžiui,

$$\begin{cases} x + y = 3, \\ x^2 - xy = -1. \end{cases}$$

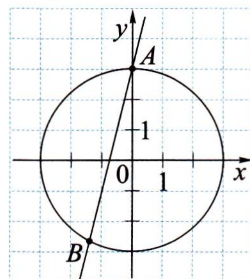
Tokios sistemos sprendiniu taip pat vadiname nežinomųjų reikšmių porą, su kuria kiekviena sistemos lygtis virsta teisinga lygybe.

Pavyzdžiui, skaičių pora (0,5; 2,5) yra šios lygčių sistemos sprendinys, nes $0{,}5 + 2{,}5 = 3$ ir $0{,}5^2 - 0{,}5 \cdot 2{,}5 = -1$, o skaičių pora (0; 3) nėra sprendinys, nes nors $0 + 3 = 3$, bet $0^2 - 0 \cdot 3 \neq -1$.

? Ar poros (1; 2), (2; 1) yra lygčių sistemos $\begin{cases} x + y = 3, \\ x^2 - xy = -1 \end{cases}$ sprendiniai?

UŽDAVINYS. Raskite tiesės $y = 4x + 3$ ir apskritimo $x^2 + y^2 = 9$ susikirtimo taškų koordinates.

Sprendimas. Vienoje koordinačių plokštumoje nubraižome tiesę $y = 4x + 3$ ir apskritimą $x^2 + y^2 = 9$. Nubrėžtos tiesės kiekvieno taško koordinatės yra lygties $y = 4x + 3$ sprendiniai, o apskritimo kiekvieno taško koordinatės yra lygties $x^2 + y^2 = 9$ sprendiniai.



Vadinasi, tiesės ir apskritimo susikirtimo taškų koordinatės tenkina ir tiesės, ir apskritimo lygtis, todėl jos yra lygčių sistemos

$$\begin{cases} y = 4x + 3, \\ x^2 + y^2 = 9 \end{cases}$$

sprendiniai.
Išsprendžiame šią lygčių sistemą *grafiniu* būdu. Remdamiesi brėžiniu randame tiesės ir apskritimo susikirtimo taškų koordinates $A(0; 3)$ ir $B(-1{,}5; -2{,}6)$. Į abi sistemos lygtis įsistatę gautas koordinates įsitikiname, kad taško A koordinates suradome tiksliai, nes $3 = 4 \cdot 0 + 3$ ir $0^2 + 3^2 = 9$, o taško B — apytiksliai, nes $-2{,}6 \approx 4 \cdot (-1{,}5) + 3$ ir $(-1{,}5)^2 + (-2{,}6)^2 \approx 9$.
Tikslius sprendinius rasime spręsdami lygčių sistemą *keitimo* būdu.
Į sistemos antrąją lygtį $x^2 + y^2 = 9$ vietoj y įrašę jo išraišką iš pirmosios lygties $(4x + 3)$ turime: $x^2 + (4x + 3)^2 = 9$.
Išsprendžiame gautą lygtį su vienu nežinomuoju:

$$x^2 + 16x^2 + 24x + 9 = 9,$$
$$17x^2 + 24x = 0,$$
$$x(17x + 24) = 0,$$
$$x = 0 \text{ arba } 17x + 24 = 0,$$
$$x = -1\frac{7}{17}.$$

Gautąsias x reikšmes įrašę į lygtį $y = 4x + 3$ apskaičiuojame atitinkamas y reikšmes:

$$\text{kai } x = 0, \text{ tai } y = 4 \cdot 0 + 3 = 3;$$
$$\text{kai } x = -1\frac{7}{17}, \text{ tai } y = 4 \cdot \left(-1\frac{7}{17}\right) + 3 = -2\frac{11}{17}.$$

Taigi sistema turi du sprendinius $(0; 3)$ ir $\left(-1\frac{7}{17}; -2\frac{11}{17}\right)$.

Atsakymas. Tiesė $y = 4x + 3$ ir apskritimas $x^2 + y^2 = 9$ susikerta taškuose $(0; 3)$ ir $\left(-1\frac{7}{17}; -2\frac{11}{17}\right)$.

Lygčių sistemą, kurios viena lygtis yra tiesinė, o kita netiesinė, keitimo būdu sprendžiame taip:

- tiesinės lygties vieną nežinomąjį išreiškiame kitu;
- gautąją išraišką įrašome į kitą sistemos lygtį;
- išsprendžiame gautą lygtį su vienu nežinomuoju;
- apskaičiuojame atitinkamas kito nežinomojo reikšmes.

1 PAVYZDYS. Išspręskime lygčių sistemą

$$\begin{cases} x^2 - 3y^2 = 13, \\ x^2 + 3y^2 = 19. \end{cases}$$

Šios sistemos abi lygtys yra netiesinės.

I būdas. Pastebėkime, kad sudėję sistemos lygtis gauname lygtį su vienu nežinomuoju:

$$+\begin{cases} x^2 - 3y^2 = 13, \\ x^2 + 3y^2 = 19, \end{cases}$$

$$2x^2 = 32,$$
$$x^2 = 16,$$
$$x_1 = -4, x_2 = 4.$$

Atitinkamas y reikšmes gausime įstatę gautąsias x reikšmes į bet kurią pradinės sistemos lygtį (pvz., į pirmąją):

kai $x = -4$, tai
$(-4)^2 - 3y^2 = 13,$
$3y^2 = 3,$
$y^2 = 1,$
$y_1 = -1,$
$y_2 = 1;$

kai $x = 4$, tai
$4^2 - 3y^2 = 13,$
$3y^2 = 3,$
$y_3 = -1,$
$y_4 = 1.$

Vadinasi, sistema turi keturis sprendinius: $(-4; -1)$, $(-4; 1)$, $(4; -1)$, $(4; 1)$.

II būdas. Šią lygčių sistemą galėjome spręsti ir keitimo būdu: išreikšti x^2 arba $3y^2$ iš vienos lygties ir gautąją išraišką įstatyti į kitą lygtį.

III būdas. Išspręskime sistemą iš abiejų lygčių išreikšdami x^2:

$$\begin{cases} x^2 = 13 + 3y^2, \\ x^2 = 19 - 3y^2. \end{cases}$$

Kadangi kairiosios lygčių pusės lygios, tai turi būti lygios ir dešiniosios, t. y.: $13 + 3y^2 = 19 - 3y^2$. Išsprendę šią lygtį su vienu nežinomuoju, gauname $y_1 = -1$; $y_2 = 1$. Atitinkamas x reikšmes gausime įstatę y reikšmes į bet kurią iš pradžioje gautų x^2 išraiškų.

Atsakymas. $(-4; -1)$, $(-4; 1)$, $(4; -1)$, $(4; 1)$.

2 PAVYZDYS. Išspręskime lygčių sistemą

$$\begin{cases} x + xy = 12, \\ 3y + xy = 25. \end{cases}$$

Labiausiai mums „trukdo“ sandauga xy, bet ją nesunku pašalinti sudėties būdu. Dauginame pirmąją lygtį iš -1 ir sudedame su antrąja lygtimi:

$$+\begin{cases} -x - xy = -12, \\ 3y + xy = 25, \end{cases}$$

$$-x + 3y = 13.$$

Iš lygties $-x+3y = 13$ nežinomąjį x išreiškiame nežinomuoju y: $x = 3y-13$. Gautąją x išraišką įstatome į bet kurią (šiuo atveju — į antrąją) pradinės sistemos lygtį ir gauname lygtį su vienu nežinomuoju:

$$3y + (3y - 13)y = 25.$$

Išsprendžiame ją:

$$3y + 3y^2 - 13y - 25 = 0,$$
$$3y^2 - 10y - 25 = 0,$$
$$D = 100 - 4 \cdot 3 \cdot (-25) = 400,$$
$$y_1 = \frac{10 - 20}{6} = -1\frac{2}{3},$$
$$y_2 = \frac{10 + 20}{6} = 5.$$

Atitinkamas x reikšmes gauname įstatę rastąsias y reikšmes į lygybę $x = 3y - 13$:

$$\text{kai } y = -1\frac{2}{3}, \text{ tai } x = 3 \cdot \left(-\frac{5}{3}\right) - 13 = -18,$$
$$\text{kai } y = 5, \text{ tai } x = 3 \cdot 5 - 13 = 2.$$

Vadinasi, sistema turi du sprendinius $\left(-18; -1\frac{2}{3}\right)$, $(2; 5)$.

Pratimai ir uždaviniai

185. Išspręskite tiesinių lygčių sistemą:

a) $\begin{cases} 2x - y = 3, \\ 7x + 2y = 16 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x - 3y = 13, \\ 3x + 4y = -4 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3(x - 5) - 1 = 6 - 2x, \\ 3(x - y) - 7y + 4 = 0 \end{cases}$ d) $\begin{cases} \frac{x+y}{3} = 2y - 5, \\ 3y - \frac{y-x}{5} = 16 \end{cases}$

186. Duota lygčių sistema $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5, \\ x + y = -3. \end{cases}$ Ar jos sprendinys yra skaičių pora:

a) $(-1; -2)$; b) $(2; 1)$; c) $(-2; -1)$; d) $(1; 2)$?

187. Grafiškai išspręskite lygčių sistemą:

a) $\begin{cases} x + y = 4, \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - y = 2, \\ xy = 4 \end{cases}$ c) $\begin{cases} (x - 4)^2 + (y - 5)^2 = 9, \\ y = x \end{cases}$

d) $\begin{cases} y = x^2, \\ 2x - y + 3 = 0 \end{cases}$ e) $\begin{cases} y = x^2 + 2, \\ y - 0{,}2x = 3 \end{cases}$ f) $\begin{cases} 3x - 4y = 2, \\ y = -0{,}5x^2 \end{cases}$

g) $\begin{cases} y = x^2 - 6x + 8, \\ y + 2x = 5 \end{cases}$ h) $\begin{cases} y = x^2, \\ x^2 + y^2 = 16 \end{cases}$ i) $\begin{cases} y = x^2 + 1, \\ xy = 3 \end{cases}$

188. Išspręskite lygčių sistemą:

a) $\begin{cases} y = 3 - x, \\ x^2 - y = 39 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y = 9, \\ y^2 + x = 29 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x - y = 3, \\ xy = -2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x - y = 0{,}8, \\ xy = 2{,}4 \end{cases}$ e) $\begin{cases} x + y = 6, \\ x^2 - y^2 = 12 \end{cases}$ f) $\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 37, \\ x - y = -3 \end{cases}$

g) $\begin{cases} 2x - y = 0, \\ \frac{12}{y} - \frac{3}{x} = 1 \end{cases}$ h) $\begin{cases} x + y = 1, \\ \frac{2}{x} - \frac{1}{y} = \frac{5}{6} \end{cases}$ i) $\begin{cases} y - x = 7, \\ \frac{4}{x} + \frac{5}{y} = -1 \end{cases}$

189. Išspręskite lygčių sistemą:

a) $\begin{cases} 2x^2 - y^2 = 30, \\ 2x^2 + y^2 = 42 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x - xy = 10, \\ y + xy = 6 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x^2 + 3x - 4y = 20, \\ x^2 - 2x + y = -5 \end{cases}$ d) $\begin{cases} xy + 3x - 4y = 12, \\ xy + 2x - 2y = 9 \end{cases}$

190. Nebraižydami raskite koordinates taškų, kuriuose:
a) tiesė $y = 2x - 1$ kerta parabolę $y = x^2 - 3x + 3$;
b) tiesė $y = x - 12$ kerta apskritimą $x^2 + y^2 = 64$.

191. Dviejų skaičių suma lygi 17, o jų sandauga yra 42. Raskite tuos skaičius.

192. Dviejų skaičių skirtumas lygus 6, o jų sandauga yra 216. Kokie tai skaičiai?

193. Dviejų skaičių suma lygi 10, o jų kvadratų suma lygi 212. Raskite tuos skaičius.

194. Stačiakampio perimetras lygus 46 cm, o jo įstrižainės ilgis yra 17 cm. Apskaičiuokite stačiakampio kraštinių ilgius.

195. Stačiojo trikampio vienas statinis 3 cm ilgesnis už kitą, o jo įžambinė lygi 15 cm. Raskite šio trikampio statinių ilgius. Apskaičiuokite jo plotą.

196. Stačiojo trikampio perimetras lygus 48 cm, o įžambinės ilgis yra 20 cm. Apskaičiuokite trikampio plotą.

197. Stačiakampio formos sklypo plotas yra 800 m^2. Sklypas aptvertas 120 m ilgio tvora. Apskaičiuokite sklypo ilgį ir plotį.

198. Iš vienos vietovės tuo pačiu metu išėjo dvi turistų grupės. Viena ėjo į šiaurę, o kita — į rytus. Po 4 h paaiškėjo, kad atstumas tarp jų lygus 24 km ir kad pirmoji grupė nuėjo 4,8 km daugiau už antrąją. Kokiu greičiu ėjo kiekviena turistų grupė?

199. Iš stačiojo kampo viršūnės jo kraštinėmis tuo pačiu metu pradeda judėti du kūnai. Po 15 s atstumas tarp jų lygus 3 m. Pirmasis kūnas per 6 s pasislenka tokiu atstumu, kokiu antrasis — per 8 s. Kokiu greičiu juda kiekvienas kūnas?

200*. Stačiakampio formos aikštelės pakraščio ilgis buvo 24 m. Kai vieną jos kraštą pailgino 3 m, o kitą sutrumpino 4 m, aikštelės plotas padidėjo 1,5 karto. Kokie yra dabartiniai aikštelės matmenys?

201. Paprastosios trupmenos vardiklis 3 vienetais didesnis už skaitiklį. Padidinus skaitiklį 7 vienetais, o vardiklį 5 vienetais, trupmena padidėtų $\frac{1}{2}$. Raskite šią trupmeną.

202. Jei prie trupmenos skaitiklio ir vardiklio pridėtume po 1, tai gautume trupmeną, lygią $\frac{1}{3}$. Jei iš tos pačios trupmenos skaitiklio ir vardiklio atimtume po 3, tai gautume trupmeną, lygią $\frac{1}{5}$. Raskite pradinę trupmeną.

203. Greitasis traukinys 480 km važiuoja 3 valandomis ilgiau, negu lėktuvas nuskrenda 1920 km. Traukinio greitis yra 8 kartus mažesnis už lėktuvo greitį. Apskaičiuokite traukinio greitį ir lėktuvo greitį.

204. Atstumas tarp dviejų miestų geležinkeliu yra 150 km. Greitasis traukinys jį nuvažiuoja 45 minutėmis greičiau negu paprastas keleivinis traukinys. Paprastas keleivinis traukinys kas valandą nuvažiuoja 10 km mažiau už greitąjį. Kokiu greičiu važiuoja kiekvienas traukinys?

205. Atstumas tarp Akmenynės ir Smėlynės lygus 50 km. Iš jų tuo pačiu metu išvažiavę motociklininkai susitiko po 30 minučių. Po to vienas jų atvyko į Smėlynę 25 minutėmis vėliau, negu kitas — į Akmenynę. Raskite kiekvieno motociklininko greitį.

206. Iš miestų A ir B tuo pačiu metu vienas priešais kitą išvažiavo du automobiliai. Po valandos jie susitiko ir nesustodami važiavo toliau tuo pačiu greičiu. Pirmasis atvyko į miestą B 27 minutėmis vėliau negu antrasis į A. Atstumas tarp miestų yra 90 km. Apskaičiuokite kiekvieno automobilio greitį.

207. Lina su mama buto langus išvalo per 2 valandas. Dirbant atskirai Lina užtrunka 3 valandomis ilgiau nei jos mama. Per kiek laiko išvalo buto langus Lina ir per kiek jos mama, dirbdamos atskirai?

208. Dviem mokinių grupėms buvo pavesta apželdinti mokyklos sklypą. Dirbdamos drauge jos tą darbą atliktų per 6 dienas. Pirmoji grupė dirbdama atskirai gali atlikti jį 5 dienomis greičiau už antrąją. Per kiek dienų kiekviena grupė apželdintų sklypą dirbdama atskirai?

209. Dvi darbininkų grupės, dirbdamos kartu, suremontuoja tam tikrą kelio ruožą per 12 dienų. 8 dienas jos dirbo kartu, bet po to pirmajai grupei buvo skirtas kitas darbas, todėl antrajai prireikė dar 7 dienų kelio ruožo remontui užbaigti. Per kiek dienų galėtų suremontuoti tą kelio ruožą kiekviena grupė, dirbdama atskirai?

210. Vandentiekio bakas pripildomas dviem vamzdžiais per 2 h 55 min. Pirmuoju vamzdžiu galima pripildyti jį 2 h greičiau negu antruoju. Per kiek laiko galima pripildyti baką kiekvienu vamzdžiu atskirai?

211. Grupė turistų turėjo sumokėti po lygiai už ekskursiją, kuri kainuoja 360 litų. Bet du turistai neatvyko, todėl kitiems teko primokėti dar po 6 litus. Kiek žmonių sumokėjo už ekskursiją ir po kiek litų?

212. Nupirkta dviejų rūšių prekių: pirmosios rūšies — už 210 Lt, antrosios — už 156 Lt. Pirmosios rūšies prekių pirkta 3 kg daugiau negu antrosios. Vienas kilogramas pirmosios rūšies prekių kainavo vienu litu brangiau. Kiek kilogramų kiekvienos rūšies prekių nupirkta?

213. Raskite funkcijos $y = f(x)$ apibrėžimo sritį, jei:
a) $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{-x}$; b) $f(x) = \sqrt{x-1} + \sqrt{x-1}$.

214. Funkcijos $f(x) = kx + b$ grafikas eina per taškus $A(2; 3)$ ir $B(-5; -4)$. Raskite k ir b reikšmes.

215. Mūrinio gyvenamojo namo draudimo 60 000 Lt sumai nuo gaisro ir kitų nelaimių tarifas yra 0,16%, o medinio gyvenamojo namo draudimo tokiai pačiai sumai — 0,2%. Kiek litų pigiau kainuoja mūrinio namo draudimas?

216. Darželyje kasdien pražysta vis tris kartus daugiau ratilių žiedų negu dieną prieš tai. Jeigu pirmadienį buvo pražydęs vienas žiedas, tai kiek jų:
a) pražys ketvirtadienį; šeštadienį;
b) žydės iš viso penktadienį; sekmadienį?

217. Obligacija, kuri bus išperkama po pusės metų su 8,5% palūkanų norma, kainuoja:
a) 191,85 Lt; b) 23,98 Lt.
Kiek litų palūkanų sumokės bankas už 5 išperkamas obligacijas?

218. Kvadrato įstrižainės, kurios lygios 7, yra koordinačių ašyse. Raskite kvadrato:
a) viršūnių koordinates; b) kraštinės ilgį; c) perimetrą; d) plotą;
e) gauto pastūmus duotąjį kvadratą per 2 ilgio vienetus į dešinę ir per 3 ilgio vienetus žemyn, viršūnių koordinates.

219. Trikampio kraštinių ilgiai yra 16 cm, 24 cm ir 32 cm. Į kokio ilgio atkarpas dalija trikampio kraštinę į ją nubrėžta:
a) didžiausiojo kampo pusiaukampinė;
b) mažiausiojo kampo pusiaukampinė?

220. Ar galima į keturkampį įbrėžti apskritimą, jeigu jo kraštinių ilgiai yra:
a) 5 cm, 9 cm, 13 cm ir 10 cm; b) 8 cm, 12 cm, 15 cm ir 11 cm?

221. Ritinio, kurio viso paviršiaus plotas lygus 112π cm^2, aukštis 6 cm ilgesnis už pagrindo spindulį. Raskite ritinio:
a) pagrindo spindulį ir aukštį;
b) ašinio pjūvio plotą;
c) aukščio ir pagrindo skersmens santykį;
d) tūrį.

222. Įrodykite tapatybę:
a) $\frac{4}{a+2} + \frac{3}{a-2} - \frac{a+1}{a^2-4} = \frac{6a-3}{a^2-4}$; b) $\frac{5}{2b-3} + \frac{2}{2b+3} + \frac{b-1}{4b^2-9} = \frac{15b+8}{4b^2-9}$.

223. Tikimybė iš 28 klasės mokinių atsitiktinai išrinkti berniuką lygi $\frac{4}{7}$.
a) Kiek berniukų mokosi klasėje?
b) Kiek mergaičių mokosi klasėje?
c) Kokia tikimybė atsitiktinai išrinkti klasės mergaitę?

224. Apskaičiuokite reiškinių $\sqrt{8}$ ir $\sqrt{8} - \sqrt{18}$:
a) sumą; b) skirtumą; c) sandaugą; d) dalmenį;
e) kvadratų skirtumą; f) skirtumo kvadratą; g) skirtumo kubą.

2 Tiesinių nelygybių su dviem kintamaisiais sistemos

Nelygybė, kurią galima užrašyti pavidalu $ax + by + c > 0$ ($ax + by + c \geqslant 0$, $ax + by + c < 0$, $ax + by + c \leqslant 0$), *kur* a, b, c *— skaičiai, be to,* a *ir* $b \neq 0$, *o* x *ir* y *— kintamieji, vadinama tiesine nelygybe su dviem kintamaisiais.*

Tiesinių nelygybių su dviem kintamaisiais pavyzdžiai:
$x - 2y + 3 > 0$, $7x - 2y + 4 \geqslant 0$, $3x < 5y + 2$.

Nelygybės su dviem kintamaisiais sprendiniu vadinama tokia kintamųjų reikšmių pora, kuri paverčia nelygybę teisinga skaitine nelygybe.

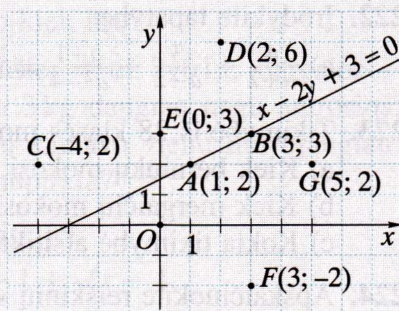
Pavyzdžiui, poros $(1; 0)$, $(4; 2)$, $(-2; -1)$ yra nelygybės $x - 2y + 3 > 0$ sprendiniai, nes $1-2\cdot 0+3 = 4 > 0$, $4-2\cdot 2+3 = 3 > 0$, $-2-2\cdot(-1)+3 = 3 > 0$. Nesunku pastebėti, kad tokių porų — nelygybės sprendinių yra be galo daug.

Išspręsti tiesinę nelygybę su dviem kintamaisiais — reiškia rasti visas kintamųjų x ir y reikšmių poras, su kuriomis nelygybė yra teisinga. Paprastai tiesinės nelygybės su dviem kintamaisiais sprendžiamos grafiniu būdu.

PAVYZDYS. Išspręskime nelygybę $x - 2y + 3 > 0$.

Koordinačių plokštumoje nubraižykime tiesę $x - 2y + 3 = 0$. Šios tiesės taškų koordinatės yra lygties $x - 2y + 3 = 0$ sprendiniai. Pavyzdžiui, $A(1; 2)$: $1 - 2\cdot 2 + 3 = 0$; $B(3; 3)$: $3 - 2\cdot 3 + 3 = 0$.

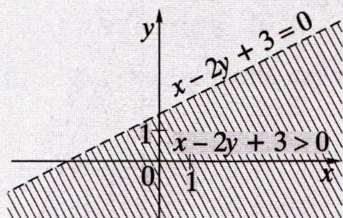
Nubrėžta tiesė padalijo plokštumą į dvi pusplokštumes. Paimkime po keletą taškų, priklausančių šioms pusplokštumėms ir įstatykime jų koordinates į nagrinėjamą nelygybę:



$C(-4; 2)$: $-4 - 2\cdot 2 + 3 = -5 < 0$,
$D(2; 6)$: $2 - 2\cdot 6 + 3 = -7 < 0$,
$E(0; 3)$: $0 - 2\cdot 3 + 3 = -3 < 0$,
$O(0; 0)$: $0 - 0\cdot 0 + 3 = 3 > 0$,
$F(3; -2)$: $3 - 2\cdot(-2) + 3 = 10 > 0$,
$G(5; 2)$: $5 - 2\cdot 2 + 3 = 4 > 0$.

Pastebėkime, kad vienoje pusplokštumėje esančių taškų (C, D ir E) koordinatės tenkina nelygybę $x - 2y + 3 < 0$, o kitoje pusplokštumėje esančių taškų (O, F ir G) koordinatės tenkina nelygybę $x - 2y + 3 > 0$.

Visus nelygybės $x - 2y + 3 > 0$ sprendinius atitinkantys taškai yra užbrūkšniuotoje pusplokštumėje.



Pastaba. Tiesės $x-2y+3=0$ taškų koordinatės nėra nelygybės $x - 2y + 3 > 0$ sprendiniai, todėl tiesė nubrėžta punktyrine linija.

Tiesė $ax + by + c = 0$ dalija plokštumą į dvi pusplokštumes. Vienoje jų yra taškai, kurių koordinatės yra nelygybės $ax + by + c > 0$ sprendiniai, kitoje — taškai, kurių koordinatės yra nelygybės $ax + by + c < 0$ sprendiniai.

Pastaba. Ieškant, kurioje pusplokštumėje yra nagrinėjamos nelygybės sprendiniai, užtenka paimti vieną pusplokštumės tašką ir patikrinti, ar to taško koordinatės tenkina sprendžiamą nelygybę.

Užduotis. Išspręskite nelygybę $2x + 4y \geqslant 16$.

Spręsdami tiesinių nelygybių su dviem kintamaisiais sistemas, ieškome kintamųjų reikšmių porų, kurios tenkina kiekvieną sistemos nelygybę. Tokias sistemas taip pat patogu spręsti grafiškai.

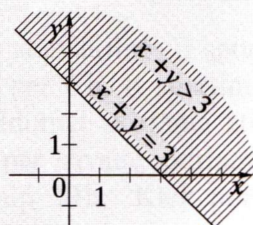
1 UŽDAVINYS. Laima gimtadienio šventei norėjo nupirkti dviejų rūšių riešutų. Vienos rūšies riešutų kilogramas parduotuvėje kainavo 9 litus, kitos — 4 litus. Kiek kiekvienos rūšies riešutų galėjo nupirkti Laima, jei ji turėjo 24 litus ir norėjo nupirkti ne mažiau 3 kilogramų riešutų?

Sprendimas. Sakykime, kad Laima pirko x kg vienos rūšies ir y kg kitos rūšies riešutų. Ji buvo nutarusi pirkti $x + y \geqslant 3$ kilogramų riešutų ir galėjo išleisti $9x + 4y \leqslant 24$ litų. Taigi turime dviejų tiesinių nelygybių su dviem kintamaisiais sistemą

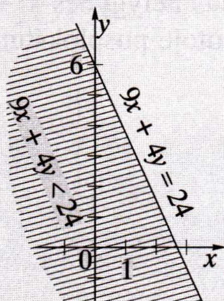
$$\begin{cases} x + y \geqslant 3, \\ 9x + 4y \leqslant 24; \end{cases} \quad \text{čia } x > 0 \text{ ir } y > 0.$$

Sprendžiame gautą nelygybių sistemą:

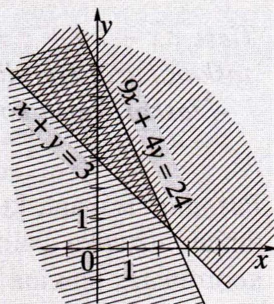
1) Koordinačių plokštumoje pavaizduojame nelygybės $x + y \geqslant 3$ sprendinius:



2) Koordinačių plokštumoje pavaizduojame nelygybės $9x + 4y \leqslant 24$ sprendinius:

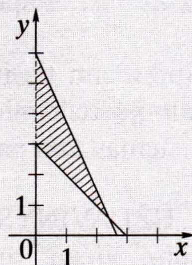


3) Užbrūkšniuotų pusplokštumių *bendrosios dalies* taškų koordinatės yra nelygybių sistemos
$$\begin{cases} x + y \geqslant 3, \\ 9x + 4y \leqslant 24 \end{cases}$$
sprendiniai.



Grįžkime prie tekstinio uždavinio, kuriam spręsti sudarėme šią nelygybių sistemą. Tekstinio uždavinio sąlygą tenkina tie sistemos sprendiniai, kurių $x > 0$ ir $y > 0$, t. y. taškai, esantys pirmajame ketvirtyje.

Taigi nagrinėtas tekstinis uždavinys turi be galo daug sprendinių, kuriuos vaizduojantys taškai yra užbrūkšniuotame trikampyje.



Nurodykime keletą uždavinio sprendinių: Laima galėjo pirkti 2 kg vienos ir 1,5 kg kitos rūšies, arba 1 kg vienos ir 3 kg kitos rūšies riešutų ir t. t.

Pratimai ir uždaviniai

225. Koordinačių plokštumoje pavaizduokite nelygybės sprendinius:
a) $y \geqslant 4 - x$; b) $y < 2x - 5$; c) $3x + y > 6$; d) $3y - 2x \leqslant 24$.

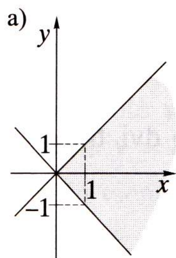
226. Išspręskite tiesinių nelygybių sistemą grafiškai:

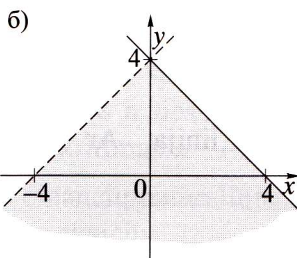
a) $\begin{cases} y \geqslant x, \\ y \geqslant -x \end{cases}$ b) $\begin{cases} y < x - 1, \\ y \leqslant 2x + 1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} y < 1 - x, \\ y \leqslant 1 - 3x \end{cases}$

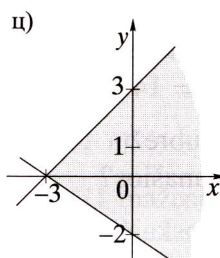
d) $\begin{cases} x + y \geqslant 6, \\ 2x - y \geqslant 0 \end{cases}$ e) $\begin{cases} x + 2 < y, \\ 2y - 3 > 2x \end{cases}$ f) $\begin{cases} x + 2y \leqslant 7, \\ 3x - 4y < 1 \end{cases}$

g) $\begin{cases} x + 2y \leqslant 8, \\ 3x - 2y > 0 \end{cases}$ *h) $\begin{cases} 2x + y \leqslant 12, \\ x \geqslant 0, \\ y \geqslant 0 \end{cases}$ *i) $\begin{cases} x + 2y \leqslant 10, \\ 3x + y \leqslant 15, \\ x \geqslant 0, \\ y \geqslant 0 \end{cases}$

227. Užrašykite nelygybių sistemą, kurios sprendiniai pavaizduoti brėžinyje:

a)


б)


ц)


228. Dėžutėje yra raudonų ir mėlynų pieštukų. Jei raudonų pieštukų būtų dvigubai daugiau, tai bendras pieštukų skaičius būtų didesnis už 24. Jei mėlynų pieštukų būtų dvigubai daugiau, tai bendras pieštukų skaičius būtų mažesnis už 27. Kiek mėlynų ir kiek raudonų pieštukų galėtų būti dėžutėje? Pavaizduokite sprendinius grafiškai. Nurodykite tris galimus variantus.

229. Eidama į turgų Austėjos mama planuoja pirkti persikų ir abrikosų. Turguje kilogramas persikų kainuoja 8 Lt, o kilogramas abrikosų — 7 Lt. Kiek kilogramų persikų ir kiek abrikosų gali nupirkti Austėjos mama, jei šiems vaisiams ji nutarusi išleisti ne daugiau kaip 32 Lt ir nori nupirkti jų bent 4 kilogramus?

230. Gamykloje gaminamos dviejų rūšių vandens slidės — standartinės ir sportinės. Viena pora standartinių slidžių pagaminama per 6 h, o sportinių — per 8 h. Kiekvienos rūšies slidžių apdailai papildomai skiriama atitinkamai 1 h ir 3 h. Abiejų rūšių slidžių gamybai per savaitę skiriama ne daugiau kaip 120 h, o apdailai — ne daugiau kaip 30 h. Kiek porų kiekvienos rūšies slidžių gali pagaminti gamykla per savaitę?

231. Nubraižykite funkcijos $y = f(x)$ grafiką, jei:

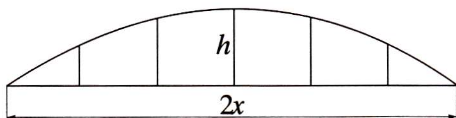
a) $f(x) = \frac{x-1}{x}$; b) $f(x) = \frac{x+2}{x}$.

232. Kokią sumą sumoka bankas už:

a) 800 Lt vekselį, likus 70 dienų iki jo apmokėjimo termino, jeigu diskonto norma 8%;

b) 1250 Lt vekselį, likus 90 dienų iki jo apmokėjimo termino, jeigu diskonto norma 7,5%?

233. Tilto arka yra parabolės formos lankas. Parabolės viršūnė yra šio lanko viduryje. Arka turi 5 vertikalias atramas, pastatytas taškuose, kurie dalija stygą, jungiančią arkos galus, į lygias dalis.



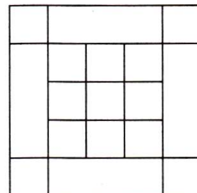
Raskite šių atramų ilgius, jei styga yra $2x = 120\,(\text{m})$, o arkos aukštis $h = 14{,}4\,\text{m}$.

234. Nubrėžta trapecijos vidurinė linija. Ar susidariusios dvi trapecijos yra panašios?

235. Apskaičiuokite:

a) $\sqrt{(2-\sqrt{3})^2} - \sqrt{(\sqrt{3}-4)^2}$; b) $\sqrt{(2-\sqrt{5})^2} + \sqrt{(2+\sqrt{5})^2}$.

236. Kiek kvadratų galima pamatyti brėžinyje?



A 25 **B** 14 **C** 19 **D** 27 **E** 23

Pasitikrinkite

1. Išspręskite lygčių sistemą grafiškai:

a) $\begin{cases} y = 2x - 2, \\ x + y = 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y = 6, \\ (x+1)^2 + y^2 = 36 \end{cases}$

c) $\begin{cases} xy = 8, \\ x - y = 0 \end{cases}$ d) $\begin{cases} y = 0{,}5x^2 - 3, \\ 2x + 5y = 10 \end{cases}$

2. Išspręskite lygčių sistemą:

a) $\begin{cases} \frac{3x}{2} - \frac{2y}{3} = 1, \\ 5x + 4y = 8 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y = 3, \\ xy = -10 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 8, \\ x - y = 4 \end{cases}$

d) $\begin{cases} y^2 - 2x - 2xy = 1, \\ x - 2y = 7 \end{cases}$ e) $\begin{cases} x^2 + 2y^2 = 228, \\ 3x^2 - 2y^2 = 172 \end{cases}$ f) $\begin{cases} x + xy + y = 11, \\ x - xy + y = 1 \end{cases}$

3. Nebraižydami išsiaiškinkite, ar susikerta:
a) parabolė $y = x^2 - 6x + 8$ ir tiesė $x + y = 4$;
b) tiesė $y = 8 - x$ ir apskritimas $x^2 + y^2 = 32$.

4. Dviejų vienas po kito einančių natūraliųjų skaičių suma 71 mažesnė už jų sandaugą. Raskite šiuos skaičius.

5. Dvi moterys kartu darbą atlieka per 6 h. Pirmoji moteris tą darbą viena dirba 5 h ilgiau negu antroji. Per kiek laiko gali atlikti visą darbą kiekviena moteris dirbdama atskirai?

6. Keleivinis traukinys per 3 h nuvažiuoja 10 km didesnį atstumą negu prekinis per 4 h. Prekinio traukinio greitis 20 km/h mažesnis už keleivinio traukinio greitį. Raskite keleivinio ir prekinio traukinių greitį.

7. Stačiakampio gėlyno plotas lygus 56 m^2, o tvorelės, juosiančios gėlyną, ilgis yra 30 m. Raskite gėlyno matmenis.

8. Stačiojo trikampio įžambinė lygi 13 cm. Vienas statinis 7 cm ilgesnis už kitą. Raskite trikampio statinius. Apskaičiuokite trikampio plotą.

9. Dviejų skaičių skirtumas lygus 5, o jų kvadratų suma lygi 125. Raskite šiuos skaičius.

10. Išspręskite grafiškai tiesinių nelygybių sistemą:

a) $\begin{cases} y > -x - 1, \\ y \leqslant 2x + 1; \end{cases}$ b) $\begin{cases} y < 2x + 2, \\ 5y - 1 \geqslant x; \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x - y \leqslant 4, \\ 3x + 2y \leqslant 6. \end{cases}$

11. Nubraižykite funkcijos $y = f(x)$ grafiką, jei:

a) $f(x) = |x-3|$; b) $f(x) = |x|-3$; c) $f(x) = \frac{x-2}{x}$; d) $f(x) = \frac{x+1}{x}$.

12. Funkcija $f(x) = -x^2$.

a) Nubraižykite funkcijos grafiką.
b) Parašykite funkcijos reikšmių sritį.
c) Nurodykite funkcijos didžiausią ir mažiausią reikšmes intervale: $[-1; 3]$; $[-4; 2]$; $[-3; -1]$; $[1; 2]$.

13. Buto draudimo nuo gaisro ir kitų nelaimingų atsitikimų tarifas yra 0,12% buto draudimo sumos. Kiek reikia mokėti draudžiant butą 70 000 Lt; 75 000 Lt sumai?

14. Tikimybė iš 25 klasės mokinių atsitiktinai išrinkti mergaitę lygi $\frac{2}{5}$.

a) Kiek mergaičių mokosi klasėje?
b) Kiek berniukų mokosi klasėje?
c) Kokia tikimybė atsitiktinai išrinkti klasės berniuką?

15. Suprastinkite reiškinį:

a) $(y-1)(y+3)-(y+1)^2$ b) $(x+1)^2-(x-2)(x+4)$

c) $(x-y)(x+y)(x^2+y^2)$ d) $(n-m)(m+n)(m^2+n^2)$

16. Į keturkampį įbrėžtas apskritimas. Keturkampio trys iš eilės paimtos kraštinės yra:

a) 9 cm, 10 cm, 13 cm; b) 8 cm, 11 cm, 12 cm.

Raskite ketvirtosios kraštinės ilgį.

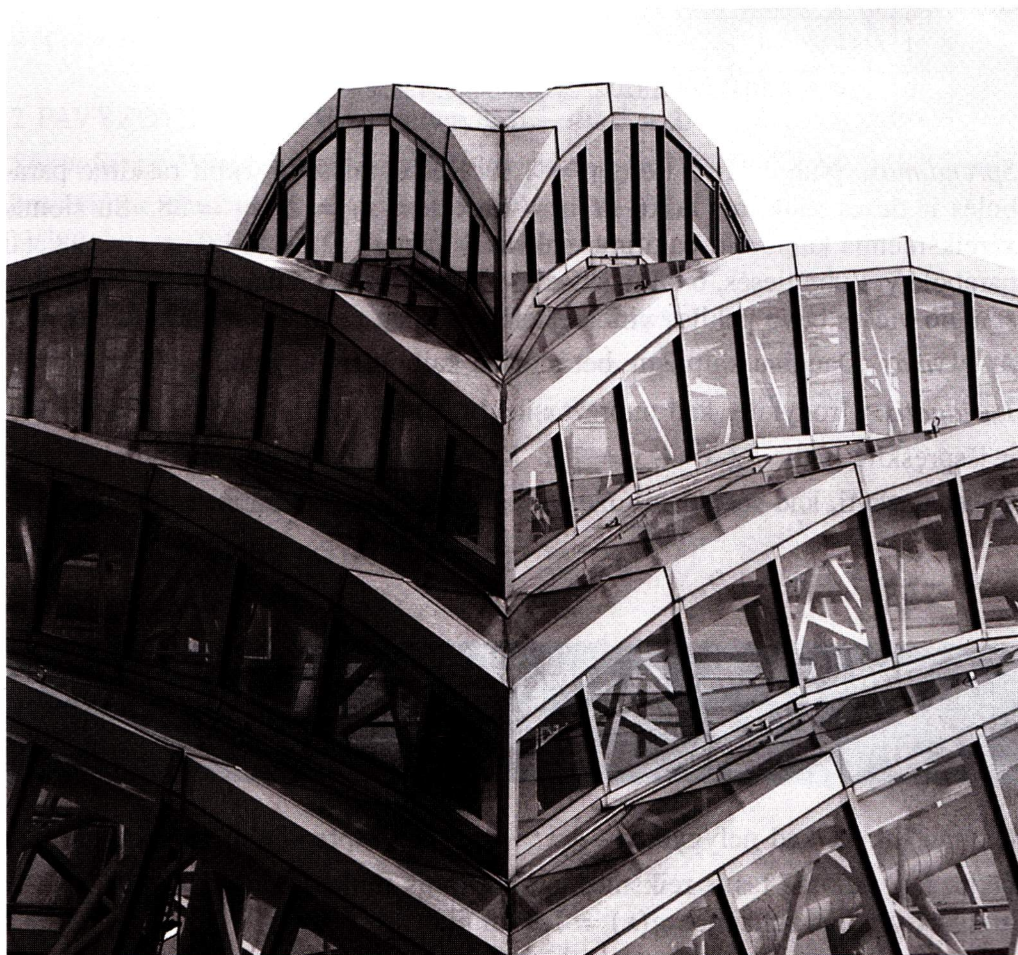
17. Kūgio, kurio šoninis paviršius lygus 135π cm^2, sudaromoji lygi 15 cm. Raskite kūgio:

a) pagrindo spindulį ir aukštį;
b) ašinio pjūvio plotą;
c) aukščio ir pagrindo skersmens santykį;
d) viso paviršiaus plotą;
e) tūrį.

18. Trijų moliūgų masės vidurkis 5 kg, o šių ir ketvirtojo moliūgo masės vidurkis 5,5 kg. Kokia ketvirtojo moliūgo masė?

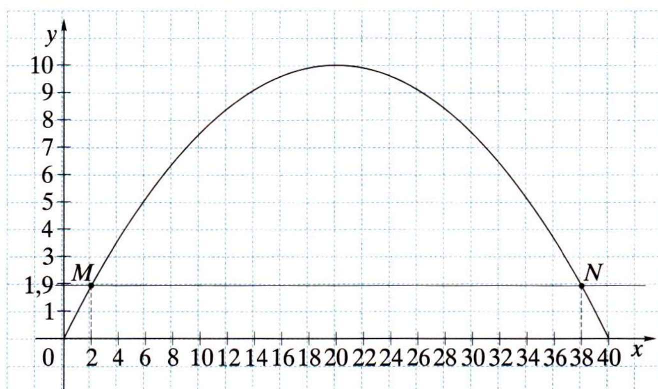
4 KVADRATINĖS NELYGYBĖS

1. Kvadratinių nelygybių grafinis sprendimas 82
2. Kvadratinių nelygybių algebrinis sprendimas 86
3. Nelygybių sprendimas intervalų metodu 93
4. Netiesinių nelygybių sistemos 98
Pasitikrinkite 103



1 Kvadratinių nelygybių grafinis sprendimas

UŽDAVINYS. Po vartininko smūgio kamuolys pakilo į 10 m aukštį ir nusileido už 40 m nuo jo. Sakykime, kad kamuolio lėkimo trajektorija — parabolė (žr. pav.). Koks buvo atstumas (horizontaliai) nuo smūgio vietos, kai kamuolys lėkė virš aikštelės būdamas aukščiau nei 1,9 m?



Sprendimas. Nubrėžkime tiesę $y = 1{,}9$. Remdamiesi brėžiniu raskime parabolės ir tiesės sankirtos taškų M ir N abscises: $x_1 = 2$, $x_2 = 38$. Su šiomis x reikšmėmis kamuolio pakilimo aukštis y lygus 1,9 m. Kai $2 < x < 38$, tai parabolė yra virš tiesės, o tai reiškia, kad kamuolys būdamas tokiu atstumu nuo smūgio vietos buvo pakilęs virš aikštelės daugiau negu 1,9 metro.

Atsakymas. Daugiau kaip 2 m, bet mažiau kaip 38 m atstumu.

1 užduotis. Įrodykite, kad nubrėžtosios parabolės lygtis yra $y = -\frac{1}{40}x^2 + x$, ir išspręskite lygtį $-\frac{1}{40}x^2 + x = 1{,}9$. Ką parodo šios lygties sprendiniai?

Galima sakyti, kad spręsdami uždavinį išsprendėme kvadratinę nelygybę:

$$-\frac{1}{40}x^2 + x > 1{,}9.$$

Nelygybės, kurias galima užrašyti pavidalu** $ax^2 + bx + c > 0$, $ax^2 + bx + c < 0$, $ax^2 + bx + c \geqslant 0$, $ax^2 + bx + c \leqslant 0$, **kai** $a \neq 0$, **vadinamos kvadratinėmis nelygybėmis.

Galima sakyti, kad nelygybės $-\frac{1}{40}x^2 + x > 1{,}9$ sprendinius radome grafiniu būdu, t. y. radome tas x reikšmes, su kuriomis funkcijos $f(x) = -\frac{1}{40}x^2 + x$ grafikas yra virš funkcijos $g(x) = 1{,}9$ grafiko.

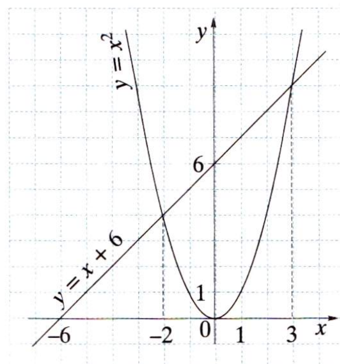
Grafiniu būdu galima apytiksliai išspręsti bet kokią kvadratinę nelygybę.

1 PAVYZDYS. Grafiniu būdu išspręskime kvadratinę nelygybę $x^2 < x + 6$.

Sprendimas. Vienoje koordinačių plokštumoje nubraižykime funkcijų $f(x) = x^2$ ir $g(x) = x + 6$ grafikus.

Nelygybės $x^2 < x + 6$ sprendiniai yra tos x reikšmės, su kuriomis teisinga nelygybė $f(x) < g(x)$. Su tomis x reikšmėmis parabolės taškai yra žemiau tiesės taškų.

Iš brėžinio matome, kad parabolė yra žemiau tiesės, kai $-2 < x < 3$. Vadinasi, $x^2 < x + 6$, kai $x \in (-2; 3)$.

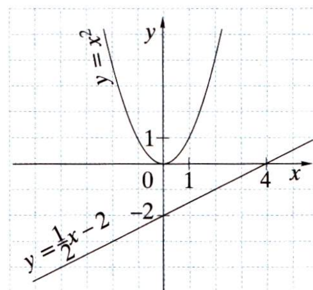


Atsakymas. $(-2; 3)$.

2 užduotis. Remdamiesi parabolės $y = x^2 - x - 6$ ir tiesės $y = 0$ grafikais išspręskite kvadratinę nelygybę $x^2 - x - 6 < 0$.

2 PAVYZDYS. Išspręskime nelygybę $x^2 > \frac{1}{2}x - 2$.

Sprendimas. Vienoje koordinačių plokštumoje nubraižykime parabolę $y = x^2$ ir tiesę $y = \frac{1}{2}x - 2$. Nelygybės sprendiniai yra tos x reikšmės, su kuriomis parabolė yra aukščiau tiesės. Taip yra su visomis kintamojo x reikšmėmis. Nelygybės sprendinys yra kiekviena x reikšmė.



Atsakymas. $(-\infty; +\infty)$.

3 užduotis. Remdamiesi parabolės $y = x^2 - \frac{1}{2}x$ ir tiesės $y = -2$ grafikais išspręskite kvadratinę nelygybę $x^2 - \frac{1}{2}x > -2$.

Pratimai ir uždaviniai

237. Kurios iš duotųjų nelygybių yra kvadratinės:

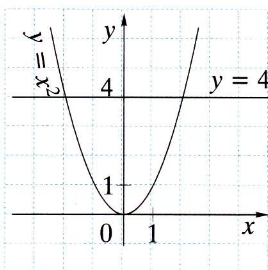
a) $3x^2 - x - 4 > 0$ b) $4x - 3^2 < 0$

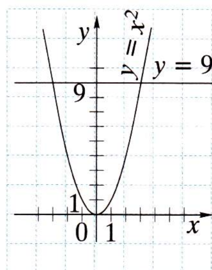
c) $2x^2 - 3 > 0$ d) $5x^2 + 8x - 2 < 0$

e) $2 - x^2 > 0$ f) $4x + 3 < 0$

g) $(3x + 1)(x - 5) < 3x^2 + 2$ h) $(x - 4)(2x + 4) > 2x^2 - 7$?

238. Remdamiesi vienu iš pavaizduotų brėžinių išspręskite nelygybę:
a) $x^2 > 4$; b) $x^2 \leqslant 4$; c) $x^2 \leqslant 9$; d) $x^2 > 9$.





239. Vienoje koordinačių plokštumoje nubraižykite funkcijų $f(x)$ ir $g(x)$ grafikus ir išspręskite nelygybę $f(x) \geqslant g(x)$:

a) $f(x) = \frac{1}{2}x^2$, $g(x) = 2$ b) $f(x) = -x^2$, $g(x) = -4$

c) $f(x) = 3 - 2x^2$, $g(x) = 1$ d) $f(x) = 3$, $g(x) = x^2 - 1$

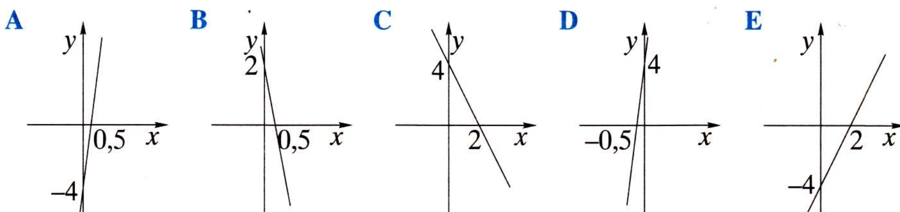
240. Grafiniu būdu išspręskite nelygybę:

a) $2x^2 \leqslant 3x + 2$ b) $9 - 4x \leqslant -2x^2$ c) $5x + 2 \leqslant 3x^2$

d) $\frac{1}{3}x^2 \leqslant -2x - 3$ e) $-x^2 - 3x \leqslant 2$ f) $x^2 - 2x \leqslant 3$

241. Grafiškai parodykite, kad:
a) nelygybė $x^2 < 3x - 3$ neturi sprendinių;
b) nelygybės $x^2 > 2x - 4$ sprendinys yra bet kuris skaičius.

242. Kuriame brėžinyje pavaizduotas funkcijos $f(x) = 2 - 4x$ grafikas?



243. Nubraižykite funkcijos $y = f(x)$ grafiką ir nustatykite funkcijos didėjimo intervalus:
a) $f(x) = |4 - x^2|$; b) $f(x) = |x^2 - 4x|$.

244. Į banką padėta 3000 Lt. Kokią sumą bus galima atsiimti po metų iš banko, skaičiuojančio 10% metines sudėtines palūkanas kas:
a) pusę metų; b) du mėnesius; c) keturis mėnesius; d) tris mėnesius?

245. Išspręskite lygčių sistemą:

a) $\begin{cases} 2x + 3y = 30, \\ 5x - 11y = 1; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5x - 3y = 4, \\ 3x - 5y = 12. \end{cases}$

246. Suprastinkite reiškinį:
a) $(5\sqrt{2} - 3)(2\sqrt{2} + 1)$; b) $(3\sqrt{12} - \sqrt{75}) \cdot \sqrt{3}$.

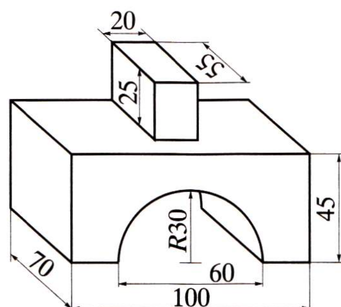
247. Jeigu $x + \frac{1}{x} = 6$, tai $x^2 + \frac{1}{x^2} = \cdots$
A 34 **B** 36 **C** 38 **D** 43 **E** atsakymas kitoks

248. Išspręskite lygtį $\frac{5}{x} - \frac{3}{x} + \frac{6}{x} = \frac{4}{11}$.

249. Agnė turi 8 pažymius. Jų vidurkis lygus 6. Kokius Agnė turi gauti tris pažymius, kad pažymių vidurkis būtų 7?

250. Išspręskite nelygybių sistemą:
a) $\begin{cases} 1 - 2x \leqslant 3, \\ 3x + 2 < 1; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2 - 3x > 1, \\ -2x + 1 < 2. \end{cases}$

251. Pagal brėžinio duomenis apskaičiuokite detalės:
a) tūrį; *b) viso paviršiaus plotą.



252. Ridenami du skirtingų spalvų lošimo kauliukai. Apskaičiuokite tikimybes įvykių:
A — abiejų kauliukų atvirtusių akučių suma dalijasi iš 3;
B — abiejų kauliukų atvirtusių akučių suma dalijasi iš 5.

253. Trys vieno mėnesio penktadieniai buvo lyginės to mėnesio dienos. Kuri savaitės diena buvo to mėnesio 18-oji?

2 Kvadratinių nelygybių algebrinis sprendimas

Sprendžiant nelygybes grafiniu būdu, daugelio jų sprendiniai randami tik apytiksliai, be to, sugaištama daug laiko braižant grafikus.
Panagrinėkime kitus kvadratinės nelygybės sprendimo būdus.

1 PAVYZDYS. Išspręskime nelygybę $x^2 - x - 6 < 0$.
Išskaidykime kairiąją nelygybės pusę dauginamaisiais:

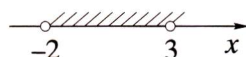
$$x^2 - x - 6 = 0,$$
$$D = 25, x_1 = -2, x_2 = 3;$$
$$x^2 - x - 6 = (x+2)(x-3),$$
$$(x+2)(x-3) < 0.$$

Dviejų dauginamųjų $(x+2)$ ir $(x-3)$ sandauga $(x+2)(x-3)$ yra neigiama, kai dauginamieji yra skirtingų ženklų, t. y. vienas — teigiamas, o kitas — neigiamas. Tai galima parašyti nelygybių sistemomis:

$$\begin{cases} x+2 > 0, \\ x-3 < 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} x+2 < 0, \\ x-3 > 0. \end{cases}$$

Šių sistemų sprendiniai yra duotosios nelygybės sprendiniai. Išsprendžiame gautas sistemas:

$$\begin{cases} x > -2, \\ x < 3; \end{cases} \qquad \begin{cases} x < -2, \\ x > 3. \end{cases}$$



Sistema sprendinių neturi.

Vadinasi, nelygybės sprendiniai priklauso intervalui $(-2; 3)$.
Pastaba. Tiriant, kada sandauga $(x+2)(x-3)$ yra neigiama (teigiama, neneigiama, neteigiama) galima sudaryti lentelę:

x	$(-\infty; -2)$	-2	$(-2; 3)$	3	$(3; +\infty)$
$x+2$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x-3$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$(x+2)(x-3)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Atsakymas. $(-2; 3)$.

? Raskite nelygybės $x^2 - x - 6 \geqslant 0$ sprendinius.

2 PAVYZDYS. Išspręskime nelygybę $x^2 - \frac{1}{2}x + 2 > 0$.

Kvadratinis trinaris $x^2 - \frac{1}{2}x + 2$ neturi realių šaknų (nėra tokių x reikšmių, su kuriomis jis lygus 0), nes $D = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = -7\frac{3}{4} < 0$. Vadinasi, kvadratinis trinaris $x^2 - \frac{1}{2}x + 2$ su visomis x reikšmėmis yra arba teigiamas, arba neigiamas. Paėmę bet kurią x reikšmę įsitikiname, kad $x^2 - \frac{1}{2}x + 2 > 0$. Pavyzdžiui, kai $x = 0$, tai $0^2 - \frac{1}{2} \cdot 0 + 2 = 2 > 0$. Taigi visi skaičiai yra duotosios nelygybės sprendiniai.

Atsakymas. $(-\infty; +\infty)$.

? Raskite nelygybės $x^2 - \frac{1}{2}x + 2 \leqslant 0$ sprendinius.

3 PAVYZDYS. Išspręskime nelygybę $4x^2 > 9$.

Pertvarkykime nelygybę:

$$4x^2 - 9 > 0.$$

Išskaidykime kairiąją nelygybės pusę dauginamaisiais (remdamiesi kvadratų skirtumo formule):

$$(2x - 3)(2x + 3) > 0.$$

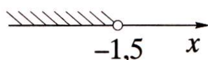
Dviejų dauginamųjų $(2x-3)$ ir $(2x+3)$ sandauga $(2x-3)(2x+3)$ yra teigiama, kai abu dauginamieji yra vienodų ženklų: arba abu neigiami, arba abu teigiami. Taigi:

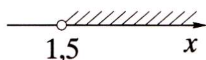
$$\begin{cases} 2x - 3 < 0, \\ 2x + 3 < 0; \end{cases} \quad \text{arba} \quad \begin{cases} 2x - 3 > 0, \\ 2x + 3 > 0. \end{cases}$$

Išsprendžiame abi gautas nelygybių sistemas:

$$\begin{cases} 2x < 3, \\ 2x < -3; \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x > 3, \\ 2x > -3; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < 1{,}5, \\ x < -1{,}5; \end{cases} \qquad \begin{cases} x > 1{,}5, \\ x > -1{,}5; \end{cases}$$





Vadinasi, nelygybės sprendiniai sudaro intervalus $(-\infty; -1{,}5)$, $(1{,}5; +\infty)$.

Pastaba. Nustatant sandaugos $(2x-3)(2x+3)$ ženklą galima sudaryti lentelę:

x	$(-\infty; -1{,}5)$	$-1{,}5$	$(-1{,}5; 1{,}5)$	$1{,}5$	$(1{,}5; +\infty)$
$2x-3$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$2x+3$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$(2x-3)(2x+3)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Atsakymas. $(-\infty; -1{,}5)$, $(1{,}5; +\infty)$.



Remdamiesi lentele raskite nelygybės $4x^2 \leqslant 9$ sprendinius.

4 PAVYZDYS. Išspręskime nelygybę $3x^2+4<0$.

Pastebėkime, kad reiškinys $3x^2$ su visomis x reikšmėmis yra neneigiamas, o pridėję 4 gausime teigiamą sumą. Akivaizdu, kad nelygybė neteisinga su visomis kintamojo x reikšmėmis.

Atsakymas. Sprendinių nėra.

Spręsdami kvadratines nelygybes pastebėjome, kad nelygybės sprendiniai gali sudaryti skaičių intervalą, du intervalus. Yra nelygybių, kurių sprendiniai yra visi realieji skaičiai, ir nelygybių, neturinčių realiųjų sprendinių.

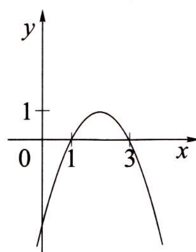
Sprendžiant kvadratines nelygybes galima remtis lentele:

Koeficiento a ženklas	$+$	$+$	$+$	$-$	$-$	$-$
Diskriminanto $D=b^2-4ac$ ženklas	$+$	$-$	0	$+$	$-$	0
Parabolės $y=ax^2+bx+c$ eskizas	x_1 x_2	x	$x_1=x_2$ x	x_1 x_2 x	x	$x_1=x_2$ x
Nelygybės $ax^2+bx+c>0$ sprendiniai	$(-\infty; x_1)$ $(x_2; +\infty)$	$(-\infty; +\infty)$	$(-\infty; x_1)$ $(x_1; +\infty)$	$(x_1; x_2)$	sprendinių nėra	sprendinių nėra
Nelygybės $ax^2+bx+c<0$ sprendiniai	$(x_1; x_2)$	sprendinių nėra	sprendinių nėra	$(-\infty; x_1)$ $(x_2; +\infty)$	$(-\infty; +\infty)$	$(-\infty; x_1)$ $(x_1; +\infty)$
Nelygybės $ax^2+bx+c\geqslant 0$ sprendiniai	$(-\infty; x_1]$ $[x_2; +\infty)$	$(-\infty; +\infty)$	$(-\infty; +\infty)$	$[x_1; x_2]$	sprendinių nėra	x_1 $(=x_2)$
Nelygybės $ax^2+bx+c\leqslant 0$ sprendiniai	$[x_1; x_2]$	sprendinių nėra	x_1 $(=x_2)$	$(-\infty; x_1]$ $[x_2; +\infty)$	$(-\infty; +\infty)$	$(-\infty; +\infty)$

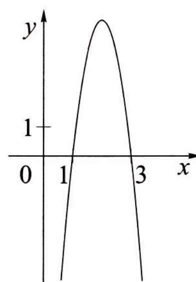
Pratimai ir uždaviniai

254. Funkcijos $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a < 0)$ reikšmė lygi 0, kai $x = 1$ ir $x = 3$. Justas, Daiva ir Adomas sąsiuviniuose nubraižė skirtingus funkcijos $y = f(x)$ grafiko eskizus ir sprendžia nelygybę $f(x) > 0$.

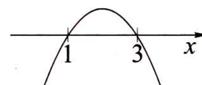
Justas



Daiva



Adomas



Ar galima teisingai išspręsti nelygybę remiantis skirtingais eskizais?

255. Išspręskite nelygybę:

a) $x^2 \leqslant 4$ b) $x^2 > 9$ c) $x^2 - 49 \geqslant 0$ d) $x^2 \leqslant 64$
e) $x^2 - 25 > 0$ f) $x^2 - 1 < 0$ g) $3x^2 \geqslant 0{,}48$ h) $x^2 + 36 < 0$

256. Išspręskite nelygybę:

a) $x^2 + 4x \leqslant 0$ b) $1{,}3x - x^2 > 0$ c) $-2x^2 - 3x > 0$
d) $3x - x^2 < 0$ e) $x^2 - 6x - 7 \geqslant 0$ f) $-x^2 + 6x \leqslant 9$
g) $-x^2 + 2x - 3 < 0$ h) $x^2 - 5x + 4 < 0$ i) $-x^2 + 5x - 6 \geqslant 0$
j) $x^2 - 18x + 17 \leqslant 0$ k) $(3 - 5x)^2 > 49$ l) $81 - (3 + 2x)^2 \leqslant 0$

257. Nurodykite tokias c reikšmes, kad nelygybę $x^2 + cx + 4 > 0$ tenkintų visos x reikšmės.

258. Įrodykite, kad su visomis x reikšmėmis:
a) trinaris $x^2 - 6x + 10$ įgyja teigiamas reikšmes;
b) trinaris $-x^2 + 20x - 200$ įgyja neigiamas reikšmes.

259. Reiškinio $\sqrt{4 - x^2}$ apibrėžimo sritis yra intervalas:

A $[0; 2]$ **B** $(2; +\infty)$ **C** $(-\infty; 2]$ **D** $[-2; 2]$
E teisingas atsakymas nenurodytas

260*. Su kuriomis a reikšmėmis lygtis neturi sprendinių:
a) $2x^2 + ax + 8 = 0$; b) $x^2 + ax + 25 = 0$?

261*. Su kuriomis m reikšmėmis lygtis turi du realius skirtingus sprendinius:
a) $x^2 + 2mx + m = 0$; b) $mx^2 + 5x + 4m = 0$?

262. Ar tiesa, kad nelygybė $n^2 - n > 3n - 4$ yra teisinga su visais natūraliaisiais skaičiais n?

263. a) Raskite teigiamus nelygybės $x^2 - x - 6 \geqslant 0$ sprendinius.
b) Raskite neigiamus nelygybės $-2x^2 - 7x + 22 \geqslant 0$ sprendinius.

264*. Raskite nelygybės $-6x^2 + 13x + 15 > 0$ sprendinius, priklausančius intervalui $[-1; 0]$.

265. Kuri nelygybė teisinga su visomis x reikšmėmis:
a) $x^2 + x + 2 > 0$; b) $x^2 + x - 2 > 0$; c) $2x^2 + 3x + 7 > 0$?

266*. a) Su kuriomis a reikšmėmis reiškinys $\frac{5}{a^2+3a}$ įgyja teigiamas reikšmes?
b) Su kuriomis m reikšmėmis reiškinys $\frac{4}{10m-5m^2}$ įgyja neigiamas reikšmes?

267*. Raskite numerius teigiamųjų sekos narių, jeigu sekos n-tojo nario formulė yra:
a) $a_n = -n^2 + 6n + 16$; b) $a_n = n^2 - 8n + 7$; c) $a_n = n^2 - 3{,}5n + 6$.

268*. Sodininkas nori atitverti stačiakampio formos plotą sodinukams. Jis norėtų panaudoti 12 m ilgio tvorelę ir aptverti plotą, ne mažesnį už 8 m^2.
a) Kokio ilgio turėtų būti stačiakampio kraštinės?
b) Kokio ilgio turėtų būti stačiakampio kraštinės, kad jo plotas būtų didžiausias?

269. Apie skritulį apibrėžtos lygiašonės trapecijos plotas yra S, o smailusis kampas prie pagrindo lygus $30°$.
1) Įrodykite, kad trapecijos plotas S lygus dvigubam aukštinės ilgio h kvadratui, t. y. $S = 2h^2$.
2) Kokio ilgio turėtų būti aukštinė, kad trapecijos plotas būtų ne mažesnis už 8 cm^2 ir ne didesnis už 18 cm^2?

270. Ūkininkas iš kelerių metų patirties nustatė apytikslę priklausomybę tarp į 1 ha išbertų trąšų kiekio (kg) ir pelno pokyčio (Lt) lyginant su pelnu, gaunamu netręšiant dirvos. Šią priklausomybę galima išreikšti kvadratine funkcija $f(x) = -0{,}1x^2 + 24x$.
a) Kokį kiekį trąšų rekomenduotumėte vienam hektarui, kad pelno pokytis būtų didesnis už 800 Lt?
b) Kokį kiekį trąšų rekomenduotumėte vienam hektarui, kad pelno pokytis būtų didžiausias?
c) Ar tiesa, kad, didinant išberiamų trąšų kiekį, pelno pokytis didėja?

271*. a) Nebraižydami grafikų raskite tas x reikšmes, su kuriomis funkcijos $f(x) = 4x - x^2$ grafiko taškai būtų aukščiau funkcijos $g(x) = 4$ grafiko taškų.

b) Nebraižydami grafikų raskite tas x reikšmes, su kuriomis funkcijos $f(x) = x^2 - 6x$ grafiko taškai būtų žemiau funkcijos $g(x) = 7$ grafiko taškų.

272*. Išilgai autostrados reikia supilti pylimą, apsaugojantį gyventojus nuo triukšmo. Pylimo skersinis pjūvis yra parabolės, kurios lygtis $y = -\frac{1}{3}x^2 + 2x$, formos (y — pylimo aukštis metrais, x — pylimo plotis metrais).

a) Įrodykite, kad pylimo plotis prie žemės yra 6 metrai, o didžiausias aukštis — 3 metrai.

b) Koks būtų pylimo plotis aukštyje, didesniame negu 1 metras? didesniame negu 2 metrai? Atsakymą pateikite 0,1 metro tikslumu.

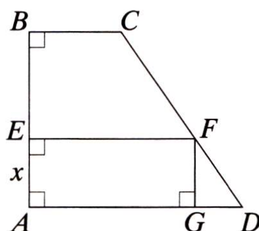
273. Per laiką t (h) nuvažiuotą traukinio kelią s (km) galima apskaičiuoti pagal formulę: $s(t) = 60t^2 + 60t + 20$. Apskaičiuokite, po kelių valandų traukinys bus nuvažiavęs daugiau negu 680 kilometrų.

274. Brėžinyje: $AB = 9\,\text{cm}$, $BC = 3\,\text{cm}$, $AD = 12\,\text{cm}$.

1) Įrodykite, kad stačiakampio $AEFG$ plotą galima išreikšti funkcija $S(x) = 12x - x^2$.

2) Su kuriomis x reikšmėmis stačiakampio plotas didesnis už $20\,\text{cm}^2$?

*3) Su kuria x reikšme stačiakampio plotas yra didžiausias?



275*. Traukiniu „Pajūris" *vakar* iš pradinės stoties išvažiavo 198 keleiviai. Tarpinėse stotyse vieni keleiviai išlipdavo, kiti įlipdavo. Bet traukinio palydovas, šiek tiek išmanantis matematiką, nustebo, kad kiekvienu momentu traukinyje esančių keleivių skaičių buvo galima apskaičiuoti pagal formulę $f(n) = 198 - 2n^2 + 14n$; čia n — jau pravažiuotų *tarpinių* stočių skaičius. (Jam taip pat patiko, kad formulė tiko ir tada, kol dar nebuvo pravažiuota nė viena tarpinė stotis, t. y. ir su $n = 0$.) Galinėje stotyje visi keleiviai išlipo.

a) Kiek daugiausiai galėjo būti tarpinių stočių?

b) Imdami tą didžiausią galimą tarpinių stočių skaičių, raskite n reikšmę, kai keleivių traukinyje buvo daugiausia.

276. Išspręskite lygčių sistemą:

a) $\begin{cases} (x-1)(y-2) = -8, \\ \frac{x+y}{y-2} = \frac{1}{2}; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 7, \\ x - y = 1. \end{cases}$

277. Nubraižykite funkcijos grafiką. Parašykite funkcijos grafiko viršūnės taško koordinates ir funkcijos didėjimo intervalą.

a) $y = -x^2 - 2$; b) $y = x^2 - 6x$; c) $y = x^2 + 6x + 8$.

278. Asmens, kurio amžius 17–70 metų, draudimo nuo mirties ir traumos įmokos tarifas sudaro 2,25% draudimo sumos, o 1–16 metų asmens — 0,6% draudimo sumos. Kiek kainuoja draudimas šeimai: mamai, tėtei ir dviem vaikams iki 16 metų, kiekvieną draudžiant 10 000 Lt suma?

279. Jeigu $-1 < 2x + 3 < 1$, tai reiškinio $-2x + 4$ reikšmės yra tarp skaičių:

A 2 ir 6 **B** -2 ir 0 **C** 0 ir 2 **D** 2 ir 4 **E** 6 ir 8

280. Kiek skaitmenų yra skaičiuje, kurį gausime apskaičiavę reiškinio $2^{12} \cdot 5^8$ reikšmę?

A 20 **B** 12 **C** 10 **D** 96 **E** atsakymas kitoks

281. Stačiojo trikampio vienas statinis lygus 15 cm, o įžambinė — 25 cm. Raskite:
a) trikampio perimetrą;
b) trikampio plotą;
c) apibrėžto apie trikampį apskritimo spindulį;
d) įbrėžto į trikampį apskritimo spindulį.

282. Raskite kubo viso paviršiaus plotą ir tūrį, jei kubo sienos įstrižainė lygi:

a) 8 cm; b) $8\sqrt{2}$ cm.

283. Valgykloje pietums yra 3 rūšių salotų, 4 rūšių sriubos, 5 rūšių antrųjų patiekalų ir 2 rūšių gėrimų. Kiek yra skirtingų pietų pasirinkimo galimybių valgant po vieną rūšį:
a) sriubų ir antrųjų patiekalų;
b) sriubų, antrųjų patiekalų ir gėrimo;
c) salotų, sriubų, antrųjų patiekalų ir gėrimo?

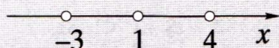
284. Aštuonerios vienodos staklės per 5 dienas bendro darbo pagamina 2000 detalių. Trejos tokios pat staklės, jeigu kartu veiks, pagamins 1500 detalių per

A 10 dienų **B** 9 dienas **C** 8 dienas **D** 7 dienas **E** 6 dienas

3 Nelygybių sprendimas intervalų metodu

UŽDAVINYS. Išspręskite nelygybę $(x+3)(x-1)(x-4)<0$.

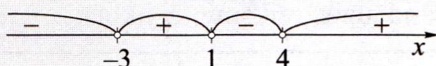
Sprendimas. Sandaugos $(x+3)(x-1)(x-4)$ ženklas priklauso nuo dauginamųjų $x+3$, $x-1$ ir $x-4$ ženklų. Akivaizdu, kad sandauga lygi nuliui, kai $x=-3$, $x=1$, $x=4$. Pažymėkime šiuos taškus skaičių tiesėje:



Kiekviename iš intervalų $(-\infty; -3)$, $(-3; 1)$, $(1; 4)$, $(4; +\infty)$ sandaugos $(x+3)(x-1)(x-4)$ ženklas pastovus. Lentelėje surašykime dauginamųjų ir sandaugos reikšmių ženklus tuose intervaluose:

x	$(-\infty; -3)$	-3	$(-3; 1)$	1	$(1; 4)$	4	$(4; +\infty)$
$x+3$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x-4$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$(x+3)(x-1)(x-4)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Galima sakyti, kad sandaugos ženklas pasikeičia priešingu, pereinant per taškus -3, 1, 4. Sandaugos ženklo kitimą skaičių tiesėje galima pailiustruoti brėžiniu:



Matome, kad duotoji nelygybė yra teisinga intervaluose $(-\infty; -3)$, $(1; 4)$.

Atsakymas. $(-\infty; -3)$, $(1; 4)$.

Sakykime, kad turime tiesinių dauginamųjų sandaugą

$$(x-x_1)(x-x_2)\cdot\ldots\cdot(x-x_n),$$

kur $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — kintamojo reikšmės, su kuriomis atitinkami dauginamieji $x-x_1$, $x-x_2$, $\ldots$, $x-x_n$ lygūs nuliui. Nagrinėkime atvejį, kai $x_1, x_2, \ldots, x_n$ nelygūs vienas kitam. Pereinant per skaičių tiesės taškus $x_1, x_2, \ldots, x_n$ paeiliui keičia savo reikšmės ženklą dauginamieji $x-x_1$, $x-x_2$, $\ldots$, $x-x_n$. Tuo pačiu pakinta ir jų sandaugos ženklas.

Ši savybė taikoma sprendžiant nelygybes, kurių pavidalas yra:

$$(x-x_1)(x-x_2)\cdot\ldots\cdot(x-x_n)>0$$

(arba su nelygybės ženklais $\geqslant$, $<$, $\leqslant$).

1 PAVYZDYS. Išspręskime nelygybę $(x+2)(x-1)(x-3) \geqslant 0$.

Skaičių tiesėje pažymėkime x reikšmes, su kuriomis sandauga $(x+2)(x-1)(x-3)$ lygi nuliui, t. y. -2, 1, 3. Gavome 4 intervalus.



Raskime funkcijos reikšmės ženklą kuriame nors intervale. Patogu imti dešiniausią. Intervale $(3; +\infty)$ visi dauginamieji teigiami, todėl jų sandauga irgi teigiama. Tą intervalą atitinkančią skaičių tiesės dalį pažymėkime $+$. Toliau, einant iš dešinės į kairę, sandaugos ženklai intervaluose vis keičiasi:



Iš paveikslėlio matome, kad nelygybė teisinga, kai x priklauso intervalams $[-2; 1]$, $[3; +\infty)$.

Atsakymas. $[-2; 1]$, $[3; +\infty)$.

Toks nelygybės sprendimo būdas vadinamas *intervalų metodu.*

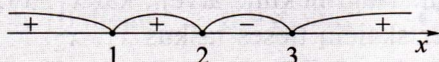
2 PAVYZDYS. Išspręskime nelygybę $(2-x)(x^2-4x+3)(x-1) \geqslant 0$.

Kvadratinį trinarį x^2-4x+3 išskaidę dauginamaisiais $(x-1)(x-3)$, dauginamąjį $(2-x)$ pakeitę dauginamuoju $-(x-2)$ ir abi nelygybės puses padauginę iš -1 gauname nelygybę $(x-1)^2(x-2)(x-3) \leqslant 0$.

Lentelėje surašykime dauginamųjų ir sandaugos reikšmių ženklus:

x	$(-\infty; 1)$	1	$(1; 2)$	2	$(2; 3)$	3	$(3; +\infty)$
$(x-1)^2$	$+$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x-3$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$(x-1)^2(x-2)(x-3)$	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Koordinačių tiesėje pažymėkime taškus $x=1$, $x=2$, $x=3$ ir nurodykime sandaugos $(x-1)^2(x-2)(x-3)$ ženklą kiekviename intervale.



Kadangi $(x-1)^2 \geqslant 0$, kai $x \in \boldsymbol{R}$, tai sandauga nekeičia ženklo pereinant per tašką $x=1$. Matome, kad nelygybė teisinga intervale $[2; 3]$ ir tuomet, kai $x=1$.

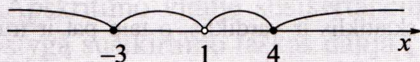
Atsakymas. 1, $[2; 3]$.

? Išspręskite nelygybę $x(x^2-5x-14)(x+2) \leqslant 0$.

Intervalų metodu patogu spręsti ir racionaliąsias nelygybes.

3 PAVYZDYS. Išspręskime nelygybę $\frac{(x+3)(x-4)}{x-1} \geqslant 0$.

Dauginamieji $x+3$, $x-4$ ir daliklis $x-1$ keičia ženklą pereinant per taškus -3, 1, 4. Tuo pačiu keičiasi ir trupmenos $\frac{(x+3)(x-4)}{x-1}$ ženklas. Minėtieji skaičiai padalija skaičių tiesę į 4 intervalus:



Kai $x=-3$ ir $x=4$, trupmena $\frac{(x+3)(x-4)}{x-1}$ lygi nuliui. Todėl skaičiai -3 ir 4 yra duotosios nelygybės sprendiniai (tie taškai skaičių tiesėje užtušuoti). Kadangi duotoji trupmena neturi prasmės, kai $x=1$, tai skaičius 1 nėra nelygybės sprendinys (taškas $x=1$ skaičių tiesėje pažymėtas baltu skrituliuku). Viename intervale nustatykime trupmenos ženklą. Pvz., intervale $(4; +\infty)$ reiškiniai $x+3$, $x-1$, $x-4$ ir duotoji trupmena įgyja teigiamas reikšmes. Toliau, einant iš dešinės į kairę, trupmenos ženklai intervaluose pakaitomis keičiasi:



Matome, kad nelygybė teisinga intervaluose: $[-3; 1)$, $[4; +\infty)$.
Atsakymas. $[-3; 1)$, $[4; +\infty)$.

? Išspręskite nelygybę $\frac{x-2}{x-4} < 0$.

Pratimai ir uždaviniai

285. Išspręskite nelygybę:

a) $(x+4)(x+1)(x-6) > 0$
b) $(x+2{,}7)(x-2{,}3)(x-7) < 0$
c) $(x+8)(x-3)(x-10) < 0$
d) $x(x-2)(x-4)(x-12) > 0$
e) $(x-1)^2(x+1)(x-3) < 0$
f) $(x^2-4x+3)(3x^2-2x-1) \geqslant 0$

286. Išspręskite nelygybę:

a) $\frac{x+3}{x-1} > 0$; b) $\frac{x+7}{3+x} < 0$; c) $\frac{5x-8}{x-4} > 0$.

287. Išspręskite kvadratinę nelygybę intervalų metodu:

a) $(3x-2)(x+4) \geqslant 0$; b) $(2x-7)(x-5) < 0$; c) $(4x+1)(2-x) > 0$.

288. Išspręskite nelygybę:

a) $\frac{1}{x} < 4$; b) $\frac{5}{x} > 3$; c) $1 < \frac{1}{x}$; d) $\frac{4}{x} < 1$.

Pavyzdys. Išspręskime nelygybę $\frac{2}{x} < 3$.

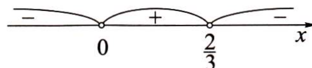
Sprendimas. Pertvarkykime nelygybę:

$\frac{2}{x} - 3 < 0$,

$\frac{2-3x}{x} < 0$.

Pereinant per taškus 0 ir $\frac{2}{3}$ skaitiklis ir vardiklis, o taip pat ir trupmena keičia ženklą.

Trupmenos $\frac{2-3x}{x}$ ženklai intervaluose:



Atsakymas. $(-\infty; 0)$, $\left(\frac{2}{3}; +\infty\right)$.

---

289. Išspręskite nelygybę:

a) $\frac{3}{x-3} \leqslant \frac{2}{x+2}$

b) $\frac{2}{x+1} \geqslant \frac{1}{x-2}$

c) $\frac{x+1}{1-x} + \frac{x-1}{x} < 2$

d) $\frac{5x(2x+1)}{x+2} < \frac{(7x-6)(2x+1)}{x-3}$

290. Išspręskite nelygybę:

a) $\frac{x-4}{x^2+2x} \leqslant 0$

b) $\frac{x^2+5x}{x-3} \geqslant 0$

c) $\frac{x^2-x-12}{x^2+4} \leqslant 0$

d) $\frac{(x+1)^2}{x^2+2x-3} \leqslant 0$

e) $\frac{(x^2-9)(x-2)}{x^2+2x-3} \geqslant 0$

f) $\frac{x^2(x-1)(x-2)}{x^2(x-5)} < 0$

291. Raskite funkcijos $f(x)$ apibrėžimo sritį:

a) $f(x) = \sqrt{\frac{2x+1}{x-2} - \frac{x+4}{2x+5}}$

b) $f(x) = \sqrt{\frac{5x-6}{7x-14}}$

c) $f(x) = \sqrt{\frac{4-x}{7-2x}}$

d) $f(x) = \sqrt{\frac{x^2-4x+4}{1-x^2}}$

292. Raskite funkcijos $f(x)$ apibrėžimo srities intervalus, kuriuose funkcija yra pastovaus ženklo:

a) $f(x) = \frac{11-2x}{4x-12}$; b) $f(x) = 4 - 9x^2$; c) $f(x) = \frac{x^2-25}{4-x^2}$.

293. Duota funkcija $f(x) = \frac{(x^2-4)(x^2-6x-16)x^7}{x-3}$. Raskite visas x reikšmes, su kuriomis teisinga nelygybė:

a) $f(x) > 0$; b) $f(x) < 0$; c) $f(x) \leqslant 0$; d) $f(x) \geqslant 0$.

294. Duota funkcija $f(x) = \frac{(1-x^2)(x^2-4x-5)x^3}{x+2}$. Raskite visas x reikšmes, su kuriomis teisinga nelygybė:

a) $f(x) > 0$; b) $f(x) < 0$; c) $f(x) \leqslant 0$; d) $f(x) \geqslant 0$.

295. Išspręskite lygčių sistemą:

a) $\begin{cases} \frac{x}{y} - \frac{y}{x} = \frac{25}{12}, \\ x^2 + y^2 = 25; \end{cases}$ b) $\begin{cases} \frac{x}{y} - \frac{y}{x} = \frac{16}{15}, \\ x^2 - y^2 = 16. \end{cases}$

296. Išspręskite lygtį:

a) $(x^2 - 8)^2 + 4(x^2 - 8) - 5 = 0$; b) $\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 - 3\left(x - \frac{1}{x}\right) - 4 = 0$.

297. Apskritimo viduje susikertančių stygų ilgiai yra 10 cm ir 11 cm. Vieną stygą susikirtimo taškas dalija į 4 cm ir 6 cm ilgio atkarpas. Į kokio ilgio atkarpas šis taškas dalija kitą stygą?

298. Apie statųjį lygiašonį trikampį apibrėžto ir į jį įbrėžto apskritimų spinduliai atitinkamai lygūs R ir r. Raskite trikampio:

a) įžambinės ilgį; b) statinių ilgius.

299. Išspręskite lygtį:

a) $|x - 1999| = 2000$; b) $|2000 - x| = 2001$.

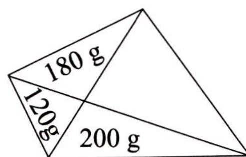
300. Prekė kainavo 25 Lt. Ji pabrango 12%, todėl prekės paklausa sumažėjo 20%. Kaip ir kiek procentų pasikeitė įplaukos už parduotas prekes?

301. Šešiaženklis skaičius baigiasi skaitmeniu 7. Jeigu šį skaitmenį perkeltume į skaičiaus priekį, tai skaičius padidėtų 5 kartus. Raskite šį skaičių.

302. Dirbtuvės per mėnesį gali pagaminti 500 kėdžių. Dirbtuvių pastoviosios išlaidos per mėnesį sudaro 8100 Lt, o kintamosios išlaidos vienai kėdei pagaminti yra 100 Lt. Kiek mažiausiai kėdžių reikia realizuoti, kad mėnesio bendrosios išlaidos būtų padengtos, jeigu kėdės realizavimo kaina yra:

a) 120 Lt; b) 125 Lt; c) 136 Lt; d) 140 Lt?

303. Keturkampis pyragas supjaustytas pagal įstrižaines į 4 gabalus. Trys gabalai pasverti: jų masės buvo 120 g, 180 g, 200 g. Kokia ketvirtojo gabalo masė, jeigu viso pyrago storis vienodas?



A 250 g **B** 275 g **C** 300 g
D 325 g **E** neįmanoma apskaičiuoti

304. Iš muzikantų kas septintas — šachmatininkas, o iš šachmatininkų kas devintas — muzikantas. Ko daugiau: muzikantų ar šachmatininkų?

4 Netiesinių nelygybių sistemos

Toliau spręsime nelygybių sistemas, kurios sudarytos ne vien iš tiesinių nelygybių.

? Ką vadiname nelygybių sistemos sprendiniu?

1 UŽDAVINYS. Raskite reiškinio

$$\sqrt{2x-4}+\sqrt{5x-x^2}$$

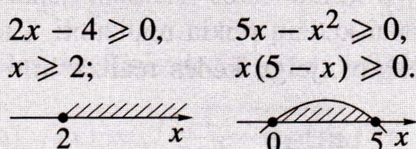
apibrėžimo sritį.

Sprendimas. Mums reikia rasti visas x reikšmes, su kuriomis abu pošaknyje esantys reiškiniai įgyja neneigiamas reikšmes. Vadinasi, reiškinio apibrėžimo sritis — nelygybių sistemos

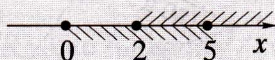
$$\begin{cases} 2x-4\geqslant 0,\\ 5x-x^2\geqslant 0 \end{cases}$$

sprendiniai.

Išsprendžiame kiekvieną sistemos nelygybę.



Randame abiejų sistemos nelygybių *bendruosius* sprendinius:



Atsakymas. [2; 5].

1 užduotis. Raskite reiškinio

$$\sqrt{9-x^2}+\sqrt{5-x}$$

apibrėžimo sritį.

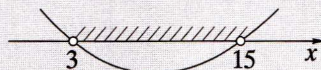
2 UŽDAVINYS. Išspręskite nelygybių sistemą

$$\begin{cases} x^2+13>14x, \\ x^2+45<18x. \end{cases}$$

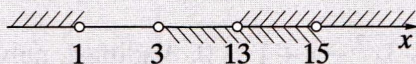
Sprendimas. Išsprendžiame kiekvieną sistemos nelygybę:

$$x^2+13>14x, \qquad x^2+45<18x,$$
$$x^2-14x+13>0, \qquad x^2-18x+45<0,$$
$$(x-1)(x-13)>0; \qquad (x-3)(x-15)<0.$$





Randame abiejų nelygybių *bendruosius* sprendinius:



Atsakymas. (13; 15).

3 UŽDAVINYS. Išspręskite nelygybių sistemą

$$\begin{cases} |2x+1|\geqslant 3, \\ |x-5|<10. \end{cases}$$

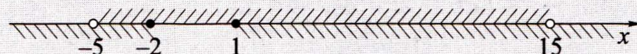
Sprendimas. Sprendžiame pirmąją sistemos nelygybę $|2x+1|\geqslant 3$. Šios nelygybės sprendiniai yra tos kintamojo x reikšmės su kuriomis

$$2x+1\geqslant 3, \quad \text{arba} \quad 2x+1\leqslant -3,$$
$$2x\geqslant 2, \qquad 2x\leqslant -4,$$
$$x\geqslant 1; \qquad x\leqslant -2.$$

Sprendžiame antrąją sistemos nelygybę $|x-5|<10$. Šios nelygybės sprendiniai yra tos x reikšmės su kuriomis

$$-10<x-5<10,$$
$$-10+5<x-5+5<10+5,$$
$$-5<x<15.$$

Randame abiejų sistemos nelygybių bendruosius sprendinius:



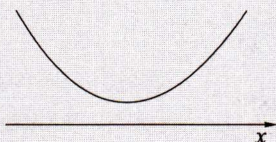
Atsakymas. (−5; −2], [1; 15).

4 UŽDAVINYS. Raskite nelygybių sistemos

$$\begin{cases} \frac{x^2-7x+6}{3x^2-x+1} \leqslant 0, \\ x^2 < 36 \end{cases}$$

sveikuosius sprendinius.

Sprendimas. Išspręskime nelygybę $\frac{x^2-7x+6}{3x^2-x+1} \leqslant 0$. Trinario $3x^2 - x + 1$ diskriminantas $D = 1 - 4 \cdot 3 < 0$. Vadinasi, parabolė $y = 3x^2 - x + 1$ nekerta x ašies. Kadangi $3 > 0$, tai parabolės šakos nukreiptos aukštyn:



Tai reiškia, kad su visomis x reikšmėmis $3x^2 - x + 1 > 0$. Vadinasi, nelygybė $\frac{x^2-7x+6}{3x^2-x+1} \leqslant 0$ yra teisinga, kai $x^2 - 7x + 6 \leqslant 0$.

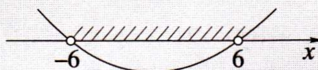
Vietoj duotosios sistemos pakanka išspręsti sistemą $\begin{cases} x^2 - 7x + 6 \leqslant 0, \\ x^2 < 36. \end{cases}$

Išspręskime kiekvieną gautos sistemos nelygybę:

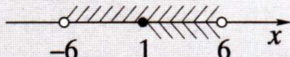
$x^2 - 7x + 6 \leqslant 0,$
$(x - 1)(x - 6) \leqslant 0;$

$x^2 < 36,$
$x^2 - 36 < 0,$
$(x - 6)(x + 6) < 0.$





Raskime abiejų nelygybių bendruosius sprendinius:



Nelygybių sistemos sprendiniai sudaro intervalą $[1; 6)$, iš kurio dar reikia išrinkti sveikuosius sprendinius.

Atsakymas. 1, 2, 3, 4, 5.

2 užduotis. Raskite lyginius skaičius, tenkinančius nelygybių sistemą

$$\begin{cases} \frac{2x^2-4x+1}{x^2+6} < 1, \\ \frac{5x-1}{3} > 1\frac{1}{3}. \end{cases}$$

Pratimai ir uždaviniai

305. Išspręskite nelygybių sistemą:

a) $\begin{cases} 4x^2 - 27x - 7 > 0, \\ x - 2 > 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + 1 < 0, \\ x^2 - 16 > 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x^2 + 4x - 5 > 0, \\ 2x - 3 < 0 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x^2 - 2x - 8 \leqslant 0, \\ x - 5 < 0 \end{cases}$

306. Raskite sveikuosius nelygybių sistemos sprendinius:

a) $\begin{cases} \frac{x^2-7x+6}{2x^2-x+1} < 0, \\ x^2 < 49 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \frac{3x^2-4x+1}{2x^2+6} < 1, \\ \frac{7x-3}{3} > 1\frac{1}{3} \end{cases}$

307. Išspręskite nelygybių sistemą:

a) $\begin{cases} |x - 1| \leqslant 2, \\ |x - 4| \geqslant 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} |2x - 5| < 3, \\ |3x - 1| \leqslant 4 \end{cases}$

c) $\begin{cases} |x - 3| < 6, \\ |x - 2| \geqslant 2 \end{cases}$ d) $\begin{cases} |x - 5| \leqslant 3, \\ |x - 4| \geqslant 2 \end{cases}$

308. Išspręskite nelygybių sistemą:

a) $\begin{cases} x^2 - x - 6 \geqslant 0, \\ x^2 - 4x < 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \frac{x}{3} - \frac{4}{3} \leqslant \frac{4}{x}, \\ \frac{1}{x} > -1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x^2 - x - 20 \geqslant 0, \\ x^2 - 5x - 14 > 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x - x^2 \geqslant 0, \\ 3x - x^2 - 2 \geqslant 0 \end{cases}$ e) $\begin{cases} 4x - x^3 \geqslant 0, \\ 2 - 3x \geqslant 0 \end{cases}$ f) $\begin{cases} x^3 - 9x \geqslant 0, \\ 3x + 1 \geqslant 0 \end{cases}$

309. Raskite reiškinio apibrėžimo sritį:

a) $\sqrt{\frac{3x+2}{5-x}} + \sqrt{\frac{4-x}{7-2x}}$;

b) $\sqrt{|x| - 3} + \sqrt{x^2 + 9} + \frac{1}{\sqrt{10-x}}$;

c) $\sqrt{7 - |x - 2|} + \sqrt{x + 2} + \frac{1}{\sqrt{3-2x}}$.

310. Raskite visas x reikšmes, su kuriomis lygtis turi prasmę (lygties spręsti nereikia):

a) $\sqrt{100 - x^2} = 3 + \sqrt{x^2 - 25}$; b) $\sqrt{x^2 - 3x + 2} = 1 + \sqrt{16 - x^2}$.

311*. a) Su kuriomis a reikšmėmis lygtis $x^2 - (2a - 1)x + 1 - a = 0$ turi du skirtingus teigiamus sprendinius?

b) Su kuriomis m reikšmėmis lygtis $x^2 - (2m - 6)x + 3m + 9 = 0$ turi skirtingų ženklų sprendinius?

c) Su kuriomis k reikšmėmis lygtis $x^2 - (2k + 4)x - 5 - 2k = 0$ turi du skirtingus neigiamus sprendinius?

312. Raskite visus nelygybių sistemos

$$\begin{cases}(x-1)(x-3)<0,\\ x>2\end{cases}$$

sprendinius, tenkinančius nelygybę $|x|<4$.

313. a) Raskite mažiausią sveikąjį nelygybės $\frac{2}{3}x-3>3x-\frac{2}{3}$ sprendinį, tenkinantį nelygybę $x^2<14$.

b) Raskite didžiausią sveikąjį nelygybės $\frac{3}{4}x-2<2x-\frac{3}{4}$ sprendinį, tenkinantį nelygybę $x^2<15$.

314. Išspręskite lygčių sistemą:

a) $\begin{cases}x^2+y^2=25,\\ x^2+y=13;\end{cases}$ b) $\begin{cases}x^2+y^2=25,\\ y^2-x=5.\end{cases}$

315*. Išspręskite lygtį:

a) $\sqrt{x-7}-\frac{6}{\sqrt{x-7}}=1$; b) $2\sqrt{x-1}-5=\frac{3}{\sqrt{x-1}}$.

316. Nubraižykite funkcijos $y=f(x)$ grafiką, jei:

a) $f(x)=3+\frac{4}{x-1}$; b) $f(x)=\frac{2}{x+1}-3$.

317. Iš plieninio rutulio, kurio masė p kg, nudildintas kubas, kurio įstrižainė lygi rutulio skersmeniui. Raskite plieno atliekų masę.

318. Išspręskite lygtį:

a) $x^2+1999x-2000=0$; b) $x^2-2001x-2002=0$.

319. Trikampio viena kraštinė $a=7\,\text{cm}$, o kita $b=2\,\text{cm}$. Kokio ilgio gali būti trečioji šio trikampio kraštinė c?

320. Prekė kainavo 20 Lt. Dabar ji kainuoja 16 Lt. Įplaukos pardavus atpigintas prekes padidėjo 10%. Kiek procentų padidėjo prekių paklausa?

321. Kokie yra lygiašonės trapecijos, kurią įstrižainė dalija į du lygiašonius trikampius, kampų didumai?

A 60° ir 120° **B** 30° ir 150° **C** 72° ir 108° **D** 50° ir 130°
E neįmanoma rasti

322. Keturios juodmargės ir trys žalos karvės per 5 dienas duoda tiek pat pieno, kiek ir trys juodmargės ir penkios žalos karvės per 4 dienas. Kurios karvės produktyvesnės (duoda daugiau pieno) — juodmargės ar žalos?

323. Apskaičiuokite:

a) $\sqrt{(\sqrt{5}-1)^2}+\sqrt{(\sqrt{5}-3)^2}$; b) $\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2}-\sqrt{(\sqrt{3}-2)^2}$.

Pasitikrinkite

1. Grafiniu būdu išspręskite nelygybę:
a) $\frac{1}{2}x^2 - 1 > -\frac{1}{2}x$; b) $x^2 - 4x \geqslant 5$; c) $1 - x^2 > -3$.

2. Išspręskite nelygybę:

a) $x^2 - 4x - 5 > 0$ b) $(x+1)(2x-5) < 0$ c) $x^2 - 2x + 1 \leqslant 0$
d) $2x^2 - 37x + 35 < 0$ e) $x^2 < 4$ f) $x^2 - 4x + 4 > 0$
g) $9x^2 > 0$ h) $\frac{1}{2}x^2 > 32$ i) $x^2 - 4x \leqslant 0$
j) $0{,}09x^2 \leqslant 0{,}04$ k) $3x^2 - 47x - 50 > 0$ l) $(2x-1)^2 > 4$

3. Raskite reiškinio $\sqrt{16x - 4x^2}$ apibrėžimo sritį.

4. Įrodykite, kad daugianaris įgyja neneigiamas reikšmes su visomis x reikšmėmis:
a) $25x^2 + 1 - 10x$; b) $1 + 36x^2 - 12x$.

5. Raskite didžiausią sveikąją a reikšmę, su kuria kvadratinis trinaris $(a+4)x^2 - 20x + a + 4$ turi dvi skirtingas realias šaknis.

6. Išspręskite nelygybę $\frac{x+1}{1-3x} > \frac{1}{3}$.

A $\left[-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right]$ **B** $\left(-\infty; -\frac{1}{3}\right), \left(\frac{1}{3}; +\infty\right)$ **C** $\left(-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$
D $\left(-\infty; \frac{1}{3}\right), \left(\frac{1}{3}; +\infty\right)$ **E** $\left[-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$

7. Su kuriomis x reikšmėmis funkcija $f(x) = \frac{(x+1)(3x+4)}{(2x-10)(x-2)}$ įgyja neigiamas reikšmes?

A $-\frac{4}{3} < x < 2$ **B** $-1 < x < 5$ **C** $-\frac{4}{3} < x < 5$
D $-1 < x < 2$; $2 < x < 5$ **E** $-\frac{4}{3} < x < -1$; $2 < x < 5$

8. Raskite visus nelygybių sistemos $\begin{cases} (x-1)(x-5) \leqslant 0, \\ x > 2 \end{cases}$ sprendinius, tenkinančius nelygybę $|x| < 3$.

9. Išspręskite nelygybę $\frac{x^2(x-1)}{x+3} \geqslant 0$.

A $(-\infty; -3)$, 0, $(1; +\infty)$ **B** $(-\infty; -3)$, 0, $[1; +\infty)$
C $(-\infty; -3)$, $[1; +\infty)$ **D** $(-3; 1)$ **E** $(-3; 0)$; $(0; 1]$

10. Išspręskite nelygybių sistemą:

a) $\begin{cases} (x+3)(x-2) > 0, \\ (x+4)(x-3) \leqslant 0; \end{cases}$ b) $\begin{cases} (x+1)(x-3) < 0, \\ (x-1)(x-2) \geqslant 0. \end{cases}$

11. Išspręskite nelygybių sistemą:

a) $\begin{cases} |x-2| < 5, \\ x - 2 \leqslant 1; \end{cases}$ b) $\begin{cases} |x-4| < 6, \\ x - 4 \geqslant 3. \end{cases}$

12. Išspręskite lygčių sistemą:

a) $\begin{cases} x^2 - y = -3, \\ x + y = 5; \end{cases}$ b) $\begin{cases} xy = -12, \\ x - y = 7; \end{cases}$ c) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 9, \\ x^2 - y = 0. \end{cases}$

13. Nubraižykite funkcijos $y = f(x)$ grafiką ir raskite funkcijos mažėjimo intervalus, jei:

a) $f(x) = |x^2 - 9|$; b) $f(x) = |6x - x^2|$.

14. Asmens draudimo nuo traumos įmokos tarifas sudaro 1,75% draudimo sumos. Kokia suma (1 Lt tikslumu) apsidraudė žmogus nuo traumos, jeigu jam draudimas su 15% nuolaida kainavo:
a) 371,88 Lt; b) 334,69 Lt?

15. Gaminio savikaina buvo 25 Lt. Ją pavyko du kartus po tiek pat procentų sumažinti iki:

a) 20,25 Lt; b) 16 Lt.
Kiek procentų kiekvieną kartą sumažėjo gaminio savikaina?

16. Suprastinkite trupmeną:

a) $\frac{x^2-1}{x^2-5x+4}$; b) $\frac{x^2+4x-5}{x^2-25}$; c) $\frac{a^4-11a^2+24}{a^4-9}$; d) $\frac{a^4-81}{a^4-17a^2+72}$.

17. Stačiojo trikampio vienas statinis 3 cm ilgesnis už kitą statinį ir 3 cm trumpesnis už įžambinę. Raskite:
a) trikampio kraštinių ilgius;
b) trikampio plotą;
c) apibrėžto apie trikampį apskritimo spindulį;
d) įbrėžto į trikampį apskritimo spindulį;
e) aukštinę, nubrėžtą į įžambinę;
f) pusiaukraštinę, nubrėžtą į įžambinę.

18. Dviejų rutulių spindulių santykis lygus 2 : 3. Koks yra šių rutulių:
a) paviršiaus plotų santykis; b) tūrių santykis?

19. Valgykloje pietums yra 2 rūšių salotų, 3 rūšių sriubos, 4 rūšių antrųjų patiekalų ir 5 rūšių gėrimų. Kiek yra skirtingų pietų pasirinkimo galimybių valgant po vieną rūšį:
a) antrųjų patiekalų ir gėrimų;
b) sriubų ir antrųjų patiekalų;
c) salotų, antrųjų patiekalų ir gėrimų;
d) sriubų, antrųjų patiekalų ir gėrimų?

20. Šeimininkė turi 500 g 9% acto, o nori pasigaminti 5% acto marinatą. Kiek vandens reikia marinatui pasigaminti?

5 KOMBINATORIKA IR TIKIMYBĖS

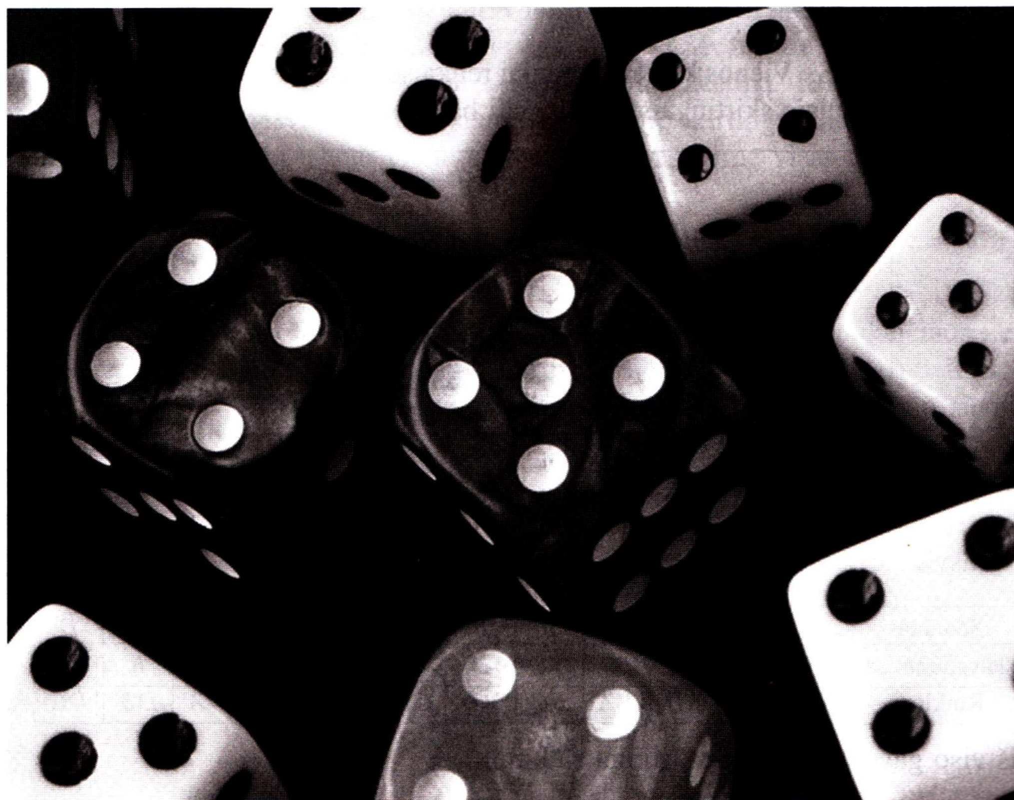
1. Rinkiniai 106

2. Nepriklausomi įvykiai 115

3. Atsitiktinis dydis 121

4. Matematinė viltis 125

Pasitikrinkite 130



1 Rinkiniai

1 UŽDAVINYS. Kiek yra triženklių skaičių, sudarytų iš skaitmenų 7, 8, 9, jei skaičiuje skaitmenys kartotis negali?

Sprendimas. Surašykime visus galimus sudaryti skaičius:

789, 798, 879, 897, 978, 987.

Taigi iš viso yra 6 tokie skaičiai.

Nebūtina visus skaičius surašyti — galima taikyti *daugybos taisyklę*. Šimtų skyriuje gali būti bet kuris iš trijų skaitmenų, t. y. jį galima pasirinkti 3 būdais; kad ir koks būtų pasirinktas pirmas skaitmuo, dešimčių skyriuje gali būti kiekvienas iš likusių dviejų skaitmenų — 2 būdai; vienetų skyriuje lieka paskutinis nepaimtas skaitmuo — 1 būdas. Vadinasi, pasirinkti visus tris skaitmenis galima $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ būdais.

Atsakymas. 6 skaičiai.

? Kiek yra keturženklių skaičių, sudarytų iš skaitmenų 1, 2, 3, 4, jei skaičiuje skaitmenys kartotis negali?

2 UŽDAVINYS. Vienos klasės mokiniai renka seniūną ir pavaduotoją iš keturių kandidatų. Keliais skirtingais būdais gali baigtis rinkimai?

DĖMESIO!

Išrinkime klasės ***seniūną ir pavaduotoją!***

Kandidatai: AUDRIUS
BRONIUS
CELESTINA
DONETA

Sprendimas. Kandidatus pažymėkime pirmosiomis jų vardų raidėmis:
Audrius — A, Bronius — B, Celestina — C, Doneta — D.
Surašykime visas galimas rinkimų baigtis:

Seniūnas	A	A	A	B	B	B	C	C	C	D	D	D
Pavaduotojas	B	C	D	A	C	D	A	B	D	A	B	C
Rinkinys	AB	AC	AD	BA	BC	BD	CA	CB	CD	DA	DB	DC

Iš viso gavome dvylika skirtingų rinkinių.

Ieškodami, kiek yra tokių rinkinių, vėl galėjome taikyti *daugybos taisyklę*. Seniūną galima pasirinkti iš keturių kandidatų (keturi būdai). Jeigu seniūnas jau pasirinktas, tai pavaduotoją galima pasirinkti iš likusių trijų kandidatų (trys būdai). Todėl galimų seniūno ir pavaduotojo rinkinių yra $4 \cdot 3 = 12$.

Atsakymas. 12 būdų.

? Kiek yra skirtingų būdų išrinkti jūsų klasės seniūną ir pavaduotoją renkant iš visų jūsų klasės mokinių?

3 UŽDAVINYS. Iš keturių kandidatų reikia išrinkti du atstovus į mokyklos tarybą. Keliais skirtingais būdais galima tai padaryti?

DĖMESIO!

Išrinkime ***du atstovus*** *į mokyklos tarybą!*

Kandidatai: AUDRIUS
BRONIUS
CELESTINA
DONETA

Sprendimas. Šiuo atveju tvarka, kuria išvardysime du išrinktus atstovus, yra *nesvarbi*. Pavyzdžiui, rinkinys AC, kaip ir rinkinys CA, reiškia, kad į mokyklos tarybą išrinkti du tie patys mokiniai — Audrius ir Celestina. Kokia tvarka juos išvardysime, visai nesvarbu. Taigi šiame uždavinyje skirtingais laikome tik tuos rinkinius, kurie skiriasi bent vienu elementu. Surašykime visas galimas tokių rinkimų baigtis:

$$AB, \quad AC, \quad AD, \quad BC, \quad BD, \quad CD.$$

Iš viso gavome šešis skirtingus rinkinius. Ieškant tokių rinkinių skaičiaus nebūtina juos visus surašyti. Kadangi, skirtingai negu 2 uždavinyje, AB ir BA (kaip ir AC bei CA ir t. t.) reiškia tą patį rinkinį, tai ieškomų rinkinių šiame uždavinyje bus 2 kartus mažiau negu 2 uždavinyje:

$$\frac{4 \cdot 3}{2} = \frac{12}{2} = 6.$$

Atsakymas. 6 būdais.

? Kiek yra skirtingų būdų išrinkti du atstovus į mokyklos tarybą renkant iš visų jūsų klasės mokinių?

Kėliniai

Pirmame uždavinyje išrašėme visus rinkinius, sudarytus iš trijų elementų 7, 8 ir 9:

$$789, 798, 879, 897, 978, 987.$$

Matome, kad rinkiniuose nėra pasikartojančių elementų (nėra vienodų skaitmenų), o rinkiniai vienas nuo kito skiriasi tik elementų išdėstymo tvarka. Tokie rinkiniai vadinami *kėliniais*.

Kėliniais iš n elementų vadinami tokie rinkiniai, kurių kiekvienas sudarytas iš visų n elementų ir kurie vienas nuo kito skiriasi tik elementų išdėstymo tvarka.

Kėlinių, sudarytų iš n elementų, skaičių žymime P_n. Kėlinių iš n elementų skaičių galima rasti pagal *daugybos taisyklę*. Kadangi pirmą elementą iš duotųjų n elementų galima imti bet kurį, tai jam pasirinkti yra n būdų. Pasirinkus pirmą elementą, antrą galima rinktis iš likusių $(n-1)$ elementų. Vadinasi, antrą elementą pasirinkti galima $(n-1)$ būdų. Taigi kiekvienam parinktam pirmajam elementui turime $(n-1)$ antrąjį elementą. Iš viso tokių pirmojo ir antrojo elementų porų bus $n \cdot (n-1)$.

Taip samprotaudami gausime, kad trečią elementą pasirinkti galima $(n-2)$ būdų, ..., n-tąjį (paskutinįjį) — 1 būdu (paskutinis likęs elementas). Iš viso kėlinių iš n elementų yra $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 1$.

Natūraliųjų skaičių nuo 1 iki n sandauga trumpai užrašoma $n!$.

Rašome: $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 1 = n!$

Skaitome: en faktorialas.

Taigi

$$P_n = n \cdot (n-1)(n-2) \cdot \ldots \cdot 1 = n!$$

Pavyzdžiui, kėliniai, sudaryti iš trijų elementų A, B ir C, yra:

$$ABC, ACB, BAC, BCA, CAB \text{ ir } CBA.$$

Trijų elementų kėlinių skaičių galima apskaičiuoti pagal formulę:

$$P_3 = 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6.$$

Gretiniai

Antrame uždavinyje (iš 4 kandidatų renkant seniūną ir pavaduotoją) surašėme visus rinkinius, sudarytus iš dviejų skirtingų elementų, paimtų iš keturių elementų A, B, C ir D:

$$AB, AC, AD, BA, BC, BD, CA, CB, CD, DA, DB, DC.$$

Šiuose rinkiniuose nėra pasikartojančių elementų (nėra vienodų raidžių), o rinkiniai vienas nuo kito skiriasi arba į tuos rinkinius įeinančiais elementais, arba elementų išdėstymo tvarka (pavyzdžiui, rinkiniai AB ir BA yra skirtingi). Tokie rinkiniai vadinami *gretiniais*. Antrame uždavinyje sudarėme gretinius iš 4 elementų po 2.

Gretiniais iš n elementų po k vadinami tokie rinkiniai, kurių kiekvienas turi k elementų, pasirinktų iš n elementų, ir kurie vienas nuo kito skiriasi arba bent vienu elementu, arba elementų išdėstymo tvarka.

Gretinius, sudarytus iš k elementų, kurie pasirinkti iš n elementų, trumpiau vadiname gretiniais iš n po k. Gretinių iš n elementų po k skaičių žymime A_n^k. Jį galima apskaičiuoti pagal daugybos taisyklę.

Kadangi pirmą elementą galima pasirinkti n būdų, antrąjį — $(n-1)$ būdų, $\ldots$, k-tąjį (paskutinį) — $(n-(k-1)) = (n-k+1)$ būdų, tai gretinių yra $n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)$.

Taigi

$$\boxed{A_n^k = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}$$

Pavyzdžiui, gretiniai iš trijų elementų A, B ir C po du bus šie:

$$AB, AC, BA, BC, CA \text{ ir } CB.$$

Kiek jų bus, galima apskaičiuoti taip:

$$A_3^2 = 3 \cdot 2 = 6.$$


Įrodykite, kad $A_n^n = P_n$.

Deriniai

Trečiame uždavinyje (iš 4 kandidatų renkant du atstovus į mokyklos tarybą) surašėme visus rinkinius, sudarytus iš dviejų skirtingų elementų, paimtų iš keturių elementų A, B, C ir D, kai elementų tvarka rinkiniuose yra nesvarbi:

AB, AC, AD, BC, BD ir CD.

Matome, kad rinkiniuose nėra pasikartojančių elementų, o rinkiniai vienas nuo kito skiriasi į juos įeinančiais elementais. Pavyzdžiui, rinkiniai AB ir BA, priešingai nei 2 uždavinyje, nelaikomi skirtingais.
Tokie rinkiniai vadinami *deriniais*. Trečiame uždavinyje sudarėme derinius iš 4 elementų po 2.

Deriniais iš n elementų po k vadinami tokie rinkiniai, kurių kiekvienas turi po k elementų, pasirinktų iš n elementų, ir kurie vienas nuo kito skiriasi bent vienu elementu.

Derinius, turinčius k elementų, kurie pasirinkti iš n elementų, trumpiau vadiname deriniais iš n po k. Derinių skaičių C_n^k galima apskaičiuoti padalijus gretinių iš n po k skaičių iš kėlinių po k skaičiaus, t. y.

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k(k-1)(k-2)\cdot\ldots\cdot1}$$

Pavyzdžiui, deriniai, sudaryti iš trijų elementų A, B ir C po du, bus:

AB, AC ir BC.

Nesurašius pačių derinių, jų skaičių galima rasti pagal formulę:

$$C_3^2 = \frac{A_3^2}{P_2} = \frac{3\cdot2}{2\cdot1} = 3.$$



Įrodykite, kad $C_n^n = 1$ ir $C_n^1 = n$.

Pratimai ir uždaviniai

324. Parduotuvėje yra 4 rūšių ledų: abrikosinių, braškinių, karamelinių ir riešutinių. Veronika nori išsirinkti:

a) 2 porcijas skirtingų rūšių ledų; b) 3 porcijas skirtingų rūšių ledų.

Surašykite visas jos pasirinkimo galimybes. Kiek jų yra?

325. Iš 5 rūšių bandelių Artūras nori pasirinkti:

a) dvi; b) tris; c) keturias skirtingų rūšių bandeles.

Kiek skirtingų galimybių jis turi?

Pavyzdys. b) Trijų bandelių rinkiniai *abc*, *acb*, *bac*, *bca*, *cab*, *cba* — tai vienas ir tas pats rinkinys, tik išdėliotas kita tvarka. Tris bandeles iš eilės galime išsirinkti taip: pirmąją — 5 būdais, antrąją — 4 būdais, trečiąją — 3 būdais. Taigi, jei tvarka svarbi, gautume $5 \cdot 4 \cdot 3$ pasirinkimo būdų. Kadangi čia pasirinkimo tvarka nesvarbi, o kiekvieną bandelių trejetą galima sutvarkyti $3 \cdot 2 \cdot 1$ skirtingais būdais, tai tris bandeles iš penkių galima išsirinkti $\frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 10$ skirtingų būdų.

---

326. Iš 6 skirtingų spalvų pieštukų Juras nori išsirinkti:

a) du; b) tris; c) keturis skirtingų spalvų pieštukus.

Kiek pasirinkimo galimybių jis turi?

327. a) 7 mokiniai dalyvavo plaukimo varžybose. Keliais skirtingais būdais gali pasiskirstyti trys prizinės vietos?

b) Iš 7 gabiausių klasės matematikų reikia išrinkti tris dalyvauti mokyklos matematikų olimpiadoje. Keliais skirtingais būdais galima tai padaryti?

328. Mokykloje veikia 8 būreliai. Romas nutarė lankyti 3, o Lina — 2 būrelius. Kiek skirtingų pasirinkimo galimybių turi Romas? kiek Lina?

329. Spaudos konferencijoje 10 žurnalistų pasisveikino vienas kitam paspausdami rankas ir apsikeitė vizitinėmis kortelėmis.

a) Kiek buvo rankų paspaudimų (kai du pasisveikina, sakysime, kad tai — vienas rankos paspaudimas)?

b) Kiek vizitinių kortelių išdalyta?

330. 14 turnyre dalyvavusių šachmatininkų sužaidė vienas su kitu po vieną partiją. Kiek partijų sužaista iš viso?

331. Kirpykla, paskelbusi konkursą laisvoms kirpėjų darbo vietoms užimti, gavo 15 prašymų. Keliais skirtingais būdais ji gali pasirinkti 3 kirpėjus?

332. Dėžėje yra 10 skirtingų spalvų rutulių. Kiek yra skirtingų galimybių ištraukti:
a) vieną; b) du; c) tris; d) keturis rutulius?

333. a) Keliais skirtingais būdais skaitytojas gali išsirinkti 4 knygas iš 12?
b) Keliais skirtingais būdais iš 12 knygų galima parinkti 4 ir jas sunumeruoti?

334. Keliais skirtingais būdais 5 sunumeruotų kėdžių eilėje gali susėsti:
a) 2 žmonės; b) 3 žmonės; c) 4 žmonės; d) 5 žmonės?

335*. Kiek skirtingų tiesių galima nubrėžti per 6 plokštumos taškus, jei jokie 3 iš jų nėra vienoje tiesėje?

336*. Kiek įstrižainių turi iškilasis:
a) šešiakampis; b) dvylikakampis?

337*. Pažymėti 8 skirtingi apskritimo taškai.
a) Kiek skirtingų apskritimo stygų galima nubrėžti per šiuos taškus?
b) Kiek galima nubraižyti skirtingų trikampių, kurių viršūnės yra pažymėtieji taškai?
c) Kiek galima nubraižyti skirtingų keturkampių, kurių viršūnės yra pažymėtieji taškai?

338*. Gimtadienio šventėje visi svečiai pasisveikino paspausdami vienas kitam ranką. Kiek svečių dalyvavo gimtadienyje, jei iš viso buvo 28 rankų paspaudimai?

339*. Lauko teniso varžybų kiekvienas dalyvis susitiko po vieną kartą su visais kitais tenisininkais. Iš viso sužaistos 36 partijos. Kiek tenisininkų dalyvavo varžybose?

340. Ant kortelių užrašytos raidės:
[N] [Y] [K] [A] [G].
a) Kiek skirtingų penkių raidžių rinkinių iš jų galima sudaryti?
b) Kiek yra tokių rinkinių, kurių pirmoji raidė K?
c) Kiek yra tokių rinkinių, kurių pirmoji raidė K, o paskutinė A?
d) Kam lygi tikimybė, kad atsitiktinai sudarytas raidžių penketas susidės į žodį [K] [N] [Y] [G] [A]?
e) Kam lygi tikimybė, kad atsitiktinai sudarytas raidžių penketas prasidės raide K?
f) Kam lygi tikimybė, kad atsitiktinai sudarytas raidžių penketas prasidės raide K, o pasibaigs raide A?

341. Iš 6 berniukų ir 8 mergaičių burtų keliu renkama 3 mokinių delegacija.
a) Kiek yra skirtingų galimybių išrinkti 3 mokinių delegaciją?
b) Kiek yra skirtingų galimybių išrinkti 3 berniukus?
*c) Kiek yra skirtingų galimybių išrinkti 2 berniukus ir vieną mergaitę?
*d) Kiek yra skirtingų galimybių išrinkti 2 mergaites ir vieną berniuką?

342. Kam lygi tikimybė, kad, atsitiktinai parinkus 3 mokinių delegaciją iš 6 berniukų ir 8 mergaičių, joje bus:
a) tik berniukai;
b) tik mergaitės;
*c) 2 berniukai ir 1 mergaitė;
*d) 2 mergaitės ir 1 berniukas?

343. Iš dėžės, kurioje yra 8 balti ir 4 juodi rutuliai, atsitiktinai išimami 2 rutuliai. Kokia tikimybė, kad:
a) abu jie yra balti;
b) abu jie yra juodi;
c) vienas rutulys juodas, o kitas baltas?

344. Lošimo kauliukas metamas du kartus. Užrašomas pirmą ir antrą kartą iškritusių akučių skaičius. Taip gaunamas dviženklis skaičius.
a) Kiek skirtingų dviženklių skaičių galima sudaryti tokiu būdu?
*b) Kiek iš jų yra lyginių?
*c) Kiek tokių dviženklių skaičių yra dalūs iš 5?
*d) Kam lygi tikimybė, kad tokiu būdu sudarytas skaičius yra lyginis?
*e) Kam lygi tikimybė, kad tokiu būdu sudarytas skaičius yra 5 kartotinis?

345. Iš 15 žmonių 6 yra kairiarankiai, kiti — dešiniarankiai. Iš šios grupės atsitiktinai parenkami 5 žmonės. Kokia tikimybė, kad iš parinktųjų:
a) visi yra kairiarankiai;
b) visi yra dešiniarankiai;
*c) 3 yra kairiarankiai ir 2 dešiniarankiai;
*d) 2 yra kairiarankiai ir 3 dešiniarankiai?

346. Mokyklos paskutinio skambučio šventėje mokytoja 10 pirmokų rikiuoja į vieną eilę.
a) Kiek yra skirtingų galimybių sustatyti pirmokus?
*b) Kiek yra skirtingų galimybių sustatyti pirmokus taip, kad du iš jų — Justas ir Povilas stovėtų greta?
*c) Jei mokiniai sustos atsitiktinai, kam lygi tikimybė, kad Justas ir Povilas stovės greta?

347. Apskaičiuokite:
a) P_5; b) P_8; c) P_{12}.

348. Apskaičiuokite:

a) A_{10}^{2}; b) A_{10}^{5}; c) A_{10}^{10}; d) A_{20}^{5}; e) A_{20}^{15}; f) A_{20}^{1}.

349. Apskaičiuokite:

a) C_{10}^{2}; b) C_{10}^{5}; c) C_{10}^{8}; d) C_{20}^{5}; e) C_{20}^{15}; f) C_{20}^{20};

350. Išspręskite nelygybę:

a) $x^2 + x + 4 > 0$ b) $x^2 + x + 4 < 0$ c) $-x^2 + x - 4 \geqslant 0$

d) $-x^2 + x - 4 \leqslant 0$ e) $\frac{x^2+1}{x^2+3x-10} < 0$ f) $\frac{10-x}{5+x^2} > \frac{1}{2}$

351. Raskite stačiojo trikampio perimetrą, jei jo statinių ilgių skirtumas lygus:
a) 15 cm, o plotas yra 240 cm^2;
b) 23 cm, o plotas yra 210 cm^2.

352. Koordinačių plokštumoje pavaizduokite nelygybių sistemos sprendinius:

a) $\begin{cases} y \geqslant 0, \\ y \leqslant x + 1, \\ x + y \leqslant 1; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y > 0, \\ x - y < 0, \\ y < 2. \end{cases}$

353. Karietos užpakalinio rato apskritimo ilgis 2 kartus didesnis už priekinio rato apskritimo ilgį. Jeigu užpakalinio rato apskritimo ilgis būtų 2 dm mažesnis, o priekinio — 4 dm didesnis, tai 120 m kelio akarpoje užpakalinio rato apsisukimų skaičius būtų 20 mažesnis už priekinio rato apsisukimų skaičių. Raskite abiejų ratų apskritimų ilgius.

354. Su kuriomis y reikšmėmis duotųjų reiškinių reikšmės yra lygios:

a) $4y^2 + 6y$ ir $3y(y - 5)$; b) $y(13 + 7y)$ ir $5y(y + 1{,}6)$?

355. Lygiašonio trikampio šoninė kraštinė lygi 4 cm, o viršūnės kampas yra 120°. Raskite apibrėžto apie šį trikampį apskritimo:
a) skersmens ilgį; b) centro atstumus iki trikampio kraštinių.

356. Kaip pasikeis kūgio tūris, jeigu jo pagrindo spindulį pailginsime 3 kartus, o aukštinę sutrumpinsime 3 kartus?

357. Du apskritimai turi bendrą centrą. Mažesniojo apskritimo spindulys sudaro 80% didesniojo apskritimo spindulio. Kaip pasikeis žiedo tarp apskritimų plotas, jeigu:
a) abu spindulius pailginsime 20%;
b) didesnįjį spindulį pailginsime 10%, o mažesnįjį — sutrumpinsime 5%?

358. Išspręskite lygčių sistemą:

a) $\begin{cases} 2x + 5y = 25, \\ 4x + 3y = 15; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 7x - 3y = 15, \\ 5x + 6y = 27. \end{cases}$

2 Nepriklausomi įvykiai

1 PAVYZDYS. Meskime monetą ir lošimo kauliuką. Žinome, kad įvykio A — „kauliukas atsivers 5 akutėmis“ tikimybė $\mathbf{P}(A) = \frac{1}{6}$. Įsitikinkime, kad ši tikimybė nepasikeis nuo to, kuria puse atsivers moneta.

Iš viso yra $2 \cdot 6 = 12$ galimų monetos ir kauliuko metimo baigčių:

$$\{H,1\},\ \{H,2\},\ \{H,3\},\ \{H,4\},\ \{H,5\},\ \{H,6\},$$
$$\{S,1\},\ \{S,2\},\ \{S,3\},\ \{S,4\},\ \{S,5\},\ \{S,6\}.$$

Jei žinome, kad atsivertė skaičius, tai įmanomi tik šeši elementarieji įvykiai:

$$\{S,1\},\quad \{S,2\},\quad \{S,3\},\quad \{S,4\},\quad \{S,5\},\quad \{S,6\},$$

iš kurių mums yra palankus tik vienas įvykis $\{S,5\}$, ir todėl įvykio A tikimybė, kai įvyko įvykis S (atsivertė skaičius)

$$\mathbf{P}(A,\ \text{kai įvyko } S) = \frac{1}{6}.$$

Lygiai taip pat įsitikiname, kad kai moneta atsiverčia herbu, tai „penkiukės“ atsivertimo tikimybė vėl yra lygi $\frac{1}{6}$.

Tokiu atveju sakome, kad įvykio A — penkiukės atsivertimas — tikimybė nepriklauso nei nuo įvykio H, nei nuo įvykio S.

Apskaičiuokime tikimybę įvykio „A ir S“ — kauliukas atsivertė penkiuke, o moneta skaičiumi.

Kadangi įvykiui „A ir S“ palankus tik vienas elementarusis įvykis $\{S,5\}$ iš 12 aukščiau surašytų galimų, tai

$$\mathbf{P}(A \text{ ir } S) = \frac{1}{12}.$$

Kadangi $\mathbf{P}(A) = \frac{1}{6}$, o $\mathbf{P}(S) = \frac{1}{2}$, tai

$$\mathbf{P}(A \text{ ir } S) = \mathbf{P}(A) \cdot \mathbf{P}(S),$$

nes $\frac{1}{12} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2}$.

Sakoma, kad įvykiai A ir B yra nepriklausomi, kai vieno jų įvykimas neturi įtakos kito įvykio tikimybei.

Tikimybė, kad įvyks du nepriklausomi įvykiai A ir B, lygi tų įvykių tikimybių sandaugai:

$$\mathbf{P}(A \text{ ir } B) = \mathbf{P}(A) \cdot \mathbf{P}(B)$$

Kartais mums visiškai aišku, kad vieno bandymo rezultatai nepriklauso nuo kito bandymo rezultatų. (Tokie bandymai vadinami nepriklausomais bandymais.)
Pavyzdžiui, metant monetą ir kauliuką, monetos metimo rezultatas neturi įtakos kauliuko metimo rezultatui; metant du kauliukus, vieno kauliuko metimo rezultatas neturi įtakos kito kauliuko metimo rezultatui. Taigi jei įvykis A susijęs su vienu iš tokių bandymų, o įvykis B — su kitu, tai tie įvykiai A ir B yra nepriklausomi ir jiems galima taikyti tikimybių sandaugos taisyklę.

Nagrinėkime įvykius, kai bandymai nepriklausomi, o kiekvienas įvykis susijęs vis su kitu bandymu. Tada tikimybių sandaugos taisyklę galima taikyti bet kuriam įvykių skaičiui.

2 PAVYZDYS. Meskime monetą keturis kartus. Kiekvienąkart metant tikimybė atsiversti herbui $\mathbf{P}(H) = \frac{1}{2}$, kaip ir tikimybė atsiversti skaičiui $\mathbf{P}(S) = \frac{1}{2}$. Metant monetą antrą kartą herbo ar skaičiaus atsivertimas nepriklauso nuo to, kuria puse moneta atsivertė pirmuoju metimu. Trečiojo metimo rezultatas nepriklauso nuo pirmųjų dviejų metimų rezultatų ir t. t. Pavyzdžiui, tikimybė, kad pirmus du kartus atsivers herbas, o po to du kartus skaičius, yra

$$\mathbf{P}(HHSS) = \mathbf{P}(H) \cdot \mathbf{P}(H) \cdot \mathbf{P}(S) \cdot \mathbf{P}(S) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{16}.$$

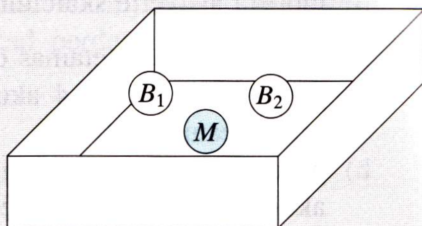
UŽDAVINYS. Dviejose dėžėse yra vienodo dydžio, bet skirtingų spalvų rutuliai. Pirmoje dėžėje yra 5 raudoni ir 7 balti rutuliai, o antroje — 8 raudoni ir 12 baltų. Iš abiejų dėžių atsitiktinai traukiama po vieną rutulį. Kokia tikimybė, kad abu rutuliai bus raudoni?
Sprendimas. Pažymėkime įvykius:
A — „iš pirmos dėžės ištrauktas rutulys yra raudonas",
B — „iš antros dėžės ištrauktas rutulys yra raudonas",
A ir B — „abu ištraukti rutuliai yra raudoni".
Aišku, kad $\mathbf{P}(A) = \frac{5}{12}$, $\mathbf{P}(B) = \frac{8}{20} = \frac{2}{5}$.
Kadangi iš antros dėžės ištraukto rutulio spalva nepriklauso nuo to, kokios spalvos rutulys ištrauktas iš pirmos dėžės, tai įvykiai A ir B yra nepriklausomi ir todėl

$$\mathbf{P}(A \text{ ir } B) = \frac{5}{12} \cdot \frac{2}{5} = \frac{1}{6}.$$

Atsakymas. Tikimybė, kad abu rutuliai bus raudoni, lygi $\frac{1}{6}$.

Skaičiuojant įvykio A ir B tikimybę svarbu nustatyti, ar tie įvykiai yra nepriklausomi.

3 PAVYZDYS. Iš dėžės, kurioje yra 2 balti ir 1 mėlynas rutuliai, nežiūrint traukiamas vienas rutulys. Pažiūrima, kokios spalvos rutulys ištrauktas, ir jis *grąžinamas* į dėžę. Tada antrą kartą traukiamas rutulys.



Apskaičiuokime tikimybę įvykio, kad pirmasis ištrauktas rutulys yra baltas, o antrasis — mėlynas, t. y. $\mathbf{P}(BM)$.
Akivaizdu, kad tikimybė antru traukimu ištraukti mėlyną rutulį nepriklauso nuo to, koks rutulys buvo ištrauktas pirmuoju, nes jis buvo grąžintas į dėžę. Vadinasi, įvykiai B ir M yra nepriklausomi, todėl

$$\mathbf{P}(BM) = \mathbf{P}(B) \cdot \mathbf{P}(M) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{9}.$$

Dabar šiek tiek pakeiskime sąlygą. Iš tos pačios dėžės traukime du rutulius, tik, ištraukus pirmąjį, jo negrąžinkime į dėžę, o traukime antrą rutulį. Ir šiuo atveju apskaičiuokime tikimybę įvykio, kad pirmasis ištrauktas rutulys yra baltas, o antrasis — mėlynas.
Dabar tikimybė antruoju paimti mėlyną rutulį priklauso nuo to, kokios spalvos rutulys buvo prieš tai ištrauktas:

- jei pirmasis ištrauktas mėlynas rutulys, tai tikimybė antruoju traukimu ištraukti mėlyną rutulį $\mathbf{P}(M) = 0$;
- jei pirmasis ištrauktas rutulys yra baltas, tai $\mathbf{P}(M) = \frac{1}{2}$.

Todėl įvykiai B ir M nėra nepriklausomi.
Šiuo atveju apskaičiuoti tikimybę $\mathbf{P}(BM)$ galima remiantis klasikiniu tikimybės apibrėžimu. Surašykime visas bandymo baigtis:

$$B_1B_2, \quad B_1M, \quad B_2B_1, \quad B_2M, \quad MB_1, \quad MB_2.$$

Įvykiui BM palankūs 2 elementarieji įvykiai (B_1M ir B_2M) iš 6 galimų. Todėl

$$\mathbf{P}(BM) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

Kaip matome $\mathbf{P}(BM) \neq \mathbf{P}(B) \cdot \mathbf{P}(M)$, nes $\frac{1}{3} \neq \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3}$.

Pratimai ir uždaviniai

359. Metama moneta ir lošimo kauliukas. Kam lygi tikimybė, kad:
a) moneta atsivertė herbu, o lošimo kauliukas šešetu;
b) moneta atsivertė skaičiumi, o lošimo kauliukas skaičiumi, daliu iš 3?

360. Lošimo kauliukas metamas du kartus. Kam lygi tikimybė, kad:
a) pirmą kartą iškrito 4 akutės, o antrą kartą iškritusių akučių skaičius yra didesnis už 4;
b) pirmą kartą iškrito nelyginis akučių skaičius, o antrą kartą iškritusių akučių skaičius yra mažesnis už 3?

361. Dviejose dėžėse yra vienodo dydžio, bet skirtingų spalvų rutuliai. Pirmoje dėžėje yra 8 raudoni ir 4 balti rutuliai, o antroje — 6 raudoni, 2 balti ir 2 juodi rutuliai. Iš abiejų dėžių atsitiktinai išimama po vieną rutulį. Kokia tikimybė, kad:
a) abu išimti rutuliai yra raudoni;
b) abu išimti rutuliai yra balti;
c) iš pirmos dėžės išimtas rutulys yra raudonas, iš antros — baltas;
d) iš pirmos dėžės išimtas rutulys yra baltas, o iš antros — juodas;
e) iš pirmos dėžės išimtas rutulys yra raudonas, o iš antros dėžės išimtas rutulys nėra raudonas?

362. Tikimybė, kad šaulys vienu šūviu pataikys į taikinį, lygi 0,8. Šaulys šauna du kartus. Kokia tikimybė, kad:
a) abu kartus šaulys pataiko į taikinį;
b) abu kartus šaulys nepataiko į taikinį;
c) pirmu šūviu šaulys pataiko, o antru nepataiko į taikinį;
d) pirmu šūviu šaulys nepataiko, o antru pataiko į taikinį?

Pavyzdys. b) Pažymėkime įvykius:
$\overline{A}_1$ — šaulys nepataikė į taikinį pirmuoju šūviu;
$\overline{A}_2$ — šaulys nepataikė į taikinį antruoju šūviu.
Įvykiai $\overline{A}_1$ ir $\overline{A}_2$ yra nepriklausomi, todėl $\mathbf{P}(\overline{A}_1 \text{ ir } \overline{A}_2) = \mathbf{P}(\overline{A}_1) \cdot \mathbf{P}(\overline{A}_2)$.
$\mathbf{P}(\overline{A}_1) = \mathbf{P}(\overline{A}_2) = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$; $\mathbf{P}(\overline{A}_1 \text{ ir } \overline{A}_2) = 0{,}2 \cdot 0{,}2 = 0{,}04$.

---

363. Trys šauliai nepriklausomai vienas nuo kito šauna į taikinį. Pirmojo šaulio pataikymo tikimybė lygi 0,85, antrojo — 0,8, trečiojo — 0,7. Kokia tikimybė, kad:
a) visi šauliai pataikys į taikinį;
b) visi šauliai nepataikys į taikinį;
c) pirmasis šaulys pataikys, o antrasis ir trečiasis nepataikys;
d) pirmasis ir antrasis šauliai pataikys, o trečiasis nepataikys?

364. Gaminant detalę atliekamos 3 nepriklausomos operacijos. Tikimybė gauti blogą detalę po kiekvienos operacijos lygi 0,01. Apskaičiuokite tikimybę pagaminti gerą detalę.

365. Kambaryje dega dvi skirtingos lemputės. Tikimybė, kad per mėnesį perdegs pirmoji lemputė, lygi 0,12, o kad perdegs antroji — 0,2. Kokia tikimybė, kad per mėnesį:
a) perdegs abi lemputės;
b) neperdegs nei viena lemputė;
c) pirmoji lemputė perdegs, o antroji — ne;
d) pirmoji lemputė neperdegs, o antroji — perdegs?

366. Tikimybė, kad studentas išlaikys matematikos egzaminą, lygi 0,8, o kad išlaikys fizikos egzaminą — 0,7. Kam lygi tikimybė, kad:
a) studentas išlaikys abu egzaminus;
b) studentas neišlaikys nei vieno egzamino?

367. Iš 50 istorijos bilietų studentas išmoko 40, o iš 60 geografijos bilietų — 45. Kokia tikimybė, kad studentas laikydamas egzaminus ištrauks:
a) istorijos bilietą, kurį jis išmoko;
b) geografijos bilietą, kurį jis išmoko;
c) ir istorijos bilietą, ir geografijos bilietą, kuriuos jis išmoko;
d) ir istorijos bilietą, ir geografijos bilietą, kurių jis neišmoko?

368. Sukdamas „laimės ratą“ vieną kartą berniukas ką nors laimi su tikimybe, lygia $\frac{1}{20}$. Kam lygi tikimybė, kad berniukas laimės kiekvieną kartą, kai ratą suks:
a) 2 kartus; b) 3 kartus; c) 4 kartus?

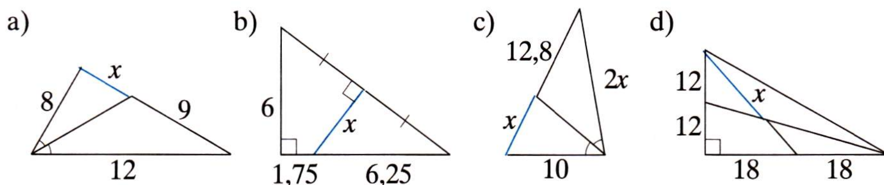
369. Išspręskite lygčių sistemą:
a) $\begin{cases} x - y = -1, \\ y + z = 5, \\ xz = 3; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y = -3, \\ y - z = 1, \\ x^2 + z^2 = 10. \end{cases}$

370. 18 000 Lt paskola turi būti grąžinta per 3 metus kas pusmetį lygiomis dalimis su 12% mažėjančiomis metinėmis palūkanomis.
a) Kiek procentų palūkanų mokama vienu mokėjimu?
b) Sudarykite paskolos grąžinimo planą.

371. Raskite pasiskolintą sumą, jeigu po dvejų metų esant 11%:
a) paprastųjų metinių palūkanų reikės grąžinti 7930 Lt; 10 248 Lt;
b) sudėtinių metinių palūkanų reikės grąžinti 7392,6 Lt; 11 088 Lt.

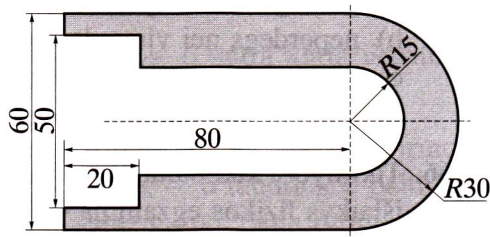
372. Atlikite veiksmus:
a) $\frac{6}{a-1} - \frac{2}{a}$; b) $\frac{3}{a} - \frac{1}{a+2}$; c) $\frac{12xy}{25} : (8x^2)$; d) $\frac{5a}{28b^2} \cdot 21ab$.

373. Raskite x:



374. Pagal brėžinio matmenis raskite simetriškos detalės:

a) perimetrą; b) plotą.



375. Į ritinio formos indą, kurio pagrindo skersmuo lygus 20 cm, pripilta vandens iki 15 cm aukščio.

a) Kiek litrų vandens pripilta inde?

b) Iki kokio aukščio (centimetro dešimtųjų tikslumu) pakils vanduo inde, jei į jį panardinsime 6 cm spindulio rutulį?

376. Duotas kvadratinis trinaris $x^2 + x - 6$.

a) Raskite kvadratinio trinario šaknis.

b) Išskaidykite kvadratinį trinarį dauginamaisiais.

c) Nubraižykite funkcijos $f(x) = x^2 + x - 6$ grafiką.

d) Ar turi šis trinaris didžiausią ar mažiausią reikšmę? Kokią?

e) Su kuriomis x reikšmėmis trinario reikšmės yra teigiamos; neigiamos?

f) Su kuriomis x reikšmėmis trinario reikšmės yra neteigiamos; neneigiamos?

377. Dviejų skaičių x ir y sandauga lygi 12.

a) Išreikškite skaičiaus y priklausomybę nuo skaičiaus x.

b) Raskite x, kai $y = 18;\ 30;\ -48;\ -\frac{1}{3}$.

c) Nubraižykite skaičiaus y priklausomybės nuo skaičiaus x grafiką.

378. Apskaičiuokite jums patogiausiu būdu:

a) $\frac{26^2}{600} + \frac{26 \cdot 34}{300} + \frac{34^2}{600}$; b) $\frac{87^2}{500} - \frac{87 \cdot 37}{250} + \frac{37^2}{500}$.

379. Šokolado plytelėje yra 30 (6×5) dalių. Kiek kartų reikės laužti, kad būtų gauti 30 gabaliukų šokolado? (Laužant plytelę jos dalių uždėti vieną ant kitos negalima.)

3 Atsitiktinis dydis

Nagrinėkime bandymą: moneta metama du kartus ir stebima, kiek kartų moneta atsivertė herbu.
Atsitiktinį įvykį „herbas neatsivertė“ galima nusakyti taip:

„atsivertimų herbu skaičius $X = 0$“;

įvykį „herbas atsivertė vieną kartą“ nusakyti taip:

„atsivertimų herbu skaičius $X = 1$“;

įvykį „herbas atsivertė du kartus“ nusakyti taip:

„atsivertimų herbu skaičius $X = 2$“.

Taigi šiuo atveju su bandymu susijusius atsitiktinius įvykius galima nusakyti atsitiktiniu dydžiu X reiškiančiu monetos atsivertimų herbu skaičių.
Šis atsitiktinis dydis gali įgyti tris skaitines reikšmes: 0, 1 ir 2. Jau esame anksčiau suskaičiavę šių reikšmių įgijimo tikimybes:

$$\mathbf{P}(X = 0) = \frac{1}{4}, \quad \mathbf{P}(X = 1) = \frac{1}{2}, \quad \mathbf{P}(X = 2) = \frac{1}{4}.$$

Atsitiktinį dydį paprastai nusakome lentele, kurioje nurodome visas atsitiktinio dydžio įgyjamas reikšmes ir tikimybes, su kuriomis tos reikšmės įgyjamos. Mūsų pavyzdyje aprašytas atsitiktinis dydis X nusakomas taip:

Atsitiktinio dydžio X įgyjamos reikšmės	0	1	2
Tikimybės	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

Kadangi nurodytos visos reikšmės, kurias gali įgyti atsitiktinis dydis X, tai apatinėje eilutėje surašytų tikimybių suma turi būti lygi 1. Iš tikrųjų:

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 1.$$

Pastaba. Atsitiktinio dydžio X reikšmių ir jas atitinkančių tikimybių visuma vadinama atsitiktinio dydžio X skirstiniu arba pasiskirstymo dėsniu.

Užduotis. Moneta metama tris kartus. Sakykime, kad X yra atsivertimų herbu skaičius. Nurodykite atsitiktinio dydžio įgyjamas reikšmes, jų įgijimo tikimybes ir užpildykite atsitiktinio dydžio skirstinio lentelę.

Pratimai ir uždaviniai

380. Ar nurodytos lentelės gali išreikšti kurio nors atsitiktinio dydžio skirstinį?

a)

X	0	1	3
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

b)

Y	-1	3	10
P	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$

c)

Z	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{9}$
P	$\frac{1}{25}$	0,26	$\frac{1}{2}$	$\frac{11}{10}$

d)

W	2	4	6	8
P	0,1	0,4	$\frac{3}{20}$	0,35

381. Vieną kartą metame lošimo kauliuką. Atsitiktinis dydis X yra atvirtusių akučių skaičius. Užrašykite jo skirstinį.

382. Metamos dvi monetos: 10 centų ir 20 centų. Atsitiktinis dydis Y — atvirtusių skaičiumi monetų nominalų suma. Užrašykite jo skirstinį.

383. Du kartus metame lošimo kauliuką. Atsitiktinis dydis X — iškritusių akučių suma. Atsitiktinis dydis Y — iškritusių akučių sandauga. Užrašykite jų pasiskirstymo dėsnius.

384. Metamas lošimo kauliukas ir 5 centų moneta. Atsitiktinis dydis Z — atvirtusių akučių ir centų suma. Atsitiktinis dydis W — atvirtusių akučių ir centų sandauga. Užrašykite šių atsitiktinių dydžių skirstinius.

385. a) Iš 100 loterijos bilietų 20 bilietų laimi po 1 Lt, 20 — po 2 Lt, 10 — po 5 Lt, 4 — po 10 Lt, kiti bilietai nelaimi nieko. Atsitiktinis dydis X — laimėjimo dydis pirkus vieną bilietą. Užrašykite jo skirstinį.

b) Iš 200 loterijos bilietų 80 bilietų laimi po 1 Lt, 20 — po 5 Lt, 12 — po 10 Lt, 4 — po 20 Lt, 2 — po 50 Lt, kiti bilietai nelaimi nieko. Atsitiktinis dydis Y — laimėjimo dydis pirkus vieną bilietą. Užrašykite jo skirstinį.

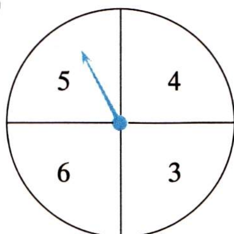
386. Iš dėžės, kurioje yra 2 balti ir 3 juodi rutuliai, atsitiktinai ištraukiami du rutuliai. Atsitiktinis dydis X — ištrauktų baltų rutulių skaičius. Atsitiktinis dydis Y — ištrauktų juodų rutulių skaičius. Raskite šių atsitiktinių dydžių pasiskirstymo dėsnius.

387. Iš dėžės, kurioje yra 2 balti ir 3 raudoni rutuliai, atsitiktinai ištraukiami 3 rutuliai. Atsitiktinis dydis X — ištrauktų baltų rutulių skaičius. Atsitiktinis dydis Y — ištrauktų raudonų rutulių skaičius. Užrašykite šių atsitiktinių dydžių skirstinius.

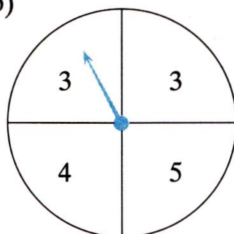
388. Iš 10 detalių 4 yra nestandartinės. Atsitiktinai paimamos 3 detalės. Atsitiktinis dydis X yra paimtų nestandartinių detalių skaičius. Užrašykite jo skirstinį.

389. Loterijos ratas suskirstytas į 4 lygius sektorius ir sužymėtas taip, kaip parodyta paveiksle:

a)



b)



Ratas sukamas vieną kartą. Atsitiktinis dydis X — laimėjimo dydis litais, kuris lygus išsuktam skaičiui minus bilieto kaina. Raskite atsitiktinio dydžio X skirstinį, jei vienas rato pasukimas kainuoja 2 Lt.

390. Įrodykite tapatybę:

a) $\frac{3}{2a+6} - \frac{a-2}{a^2+6a+9} = \frac{a+13}{2(a+3)^2}$; b) $\frac{5-a}{a^2-8a+16} + \frac{6}{5a-20} = \frac{a+1}{5(a-4)^2}$.

391. Išspręskite nelygybę:

a) $x^2 - 4x + 4 \geqslant 0$ b) $x^2 - 4x + 4 \leqslant 0$ c) $x^2 - 4x + 4 > 0$

d) $x^2 - 4x + 4 < 0$ e) $\frac{x^2-5x+6}{x^2+5x+6} < 0$ f) $\frac{x^2-3x+1}{x^2-1} > 1$

392. Dviejų skaičių skirtumo ir jų sumos santykis lygus 3 : 8, o šių skaičių skirtumo ir jų sandaugos santykis yra 6 : 55. Raskite šiuos skaičius.

393. Seka (a_n) yra aritmetinė progresija:

a) $-30; -26; -22; -18; \ldots$; b) $-26; -23; -20; -17; \ldots$

Parašykite progresijos n-tojo nario formulę ir apskaičiuokite:

1) a_{200}; 2) S_{200}.

394. Žinoma, kad iš 8 kg sausų linų šiaudelių išeina 0,7 kg linų pluošto.

a) Parašykite formulę, pagal kurią būtų galima apskaičiuoti linų pluošto masę M (kilogramais) žinant sausų linų šiaudelių masę m (kilogramais).

b) Pagal parašytą formulę apskaičiuokite, kiek linų pluošto išeina iš 100 kg; 150 kg; 250 kg; 400 kg sausų linų šiaudelių.

c) Pagal parašytą formulę apskaičiuokite, kiek reikia sausų linų šiaudelių, kad gautume 17,5 kg; 21 kg; 262,5 kg; 367,5 kg linų pluošto.

395. Penki mokiniai nusipirko 100 sąsiuvinių: Karolis ir Vytautas nusipirko 52 sąsiuvinius, Vytautas ir Gediminas — 43, Gediminas ir Povilas — 34, Povilas ir Vilius — 30. Kiek sąsiuvinių nusipirko kiekvienas mokinys?

396. Skritulio, kurio spindulys lygus 18 cm, nuopjovos lankas lygus:

a) 6π cm; b) 12π cm.

Raskite nuopjovos perimetrą ir plotą.

397. Apie apskritimą apibrėžtos trapecijos perimetras lygus 72 cm. Raskite trapecijos vidurinės linijos ilgį.

398. Nubraižykite statųjį trikampį, kurio statiniai lygūs 4 cm ir 6 cm. Nubraižykite panašų į jį trikampį, kai panašumo koeficientas yra:

a) $k = 0{,}75$; b) $k = 1{,}5$.

399. Kūgio šoninio paviršiaus išklotinė yra pusskritulis, kurio skersmuo 24 cm. Raskite kūgio:

a) sudaromąją;
b) pagrindo spindulį;
c) aukštį;
d) tūrį.

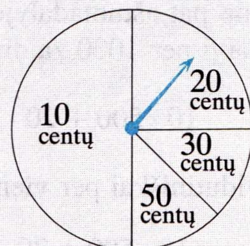
400. Apskaičiuokite reiškinių $\sqrt{75} - \sqrt{27}$ ir $\sqrt{12}$:

a) sumą; b) skirtumą; c) sandaugą; d) dalmenį; e) kvadratų sumą; f) sumos kvadratą; g) sumos kubą.

4 Matematinė viltis

Jaunimo kavinės šeimininkas, pastebėjęs, kad lankytojams nusibodo stumdyti biliardo rutulius ir žaisti smiginį, sugalvojo naują azartinį žaidimą.

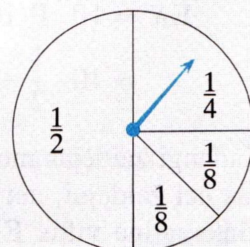
Jis perdarė smiginio lentą į sukutį su nevienodai padalytu plotu. Didžiausioje dalyje — pusskritulyje (lygiai 50% ploto) buvo užrašas „10 centų“, antroje dalyje — skritulio ketvirtyje (lygiai 25% ploto) parašyta „20 centų“, o likęs ketvirtadalis buvo padalytas dar pusiau: viename aštuntadalyje buvo parašyta „30 centų“, kitame — „50 centų“. Taisyklės buvo labai paprastos: kiekvienas sumokėjęs 20 centų turi teisę sukti rodyklę, o po kiekvieno sukimo gauna iš kasos tiek, kiek nurodyta sektoriuje, kuriame rodyklė sustoja. (Jei rodyklė sustoja ant ribos, ji pastumiama į sektorių, esantį pagal laikrodžio rodyklę.)



Kavinės šeimininkas numatė, kad žaidimas jam nebus nei pelningas, nei nuostolingas. Bet žaidimas turėtų pritraukti į kavinę daugiau lankytojų, todėl bus parduota daugiau prekių. Padidėjusi apyvarta turėtų atnešti apčiuopiamą naudą. Kodėl šeimininkas manė, kad pats žaidimas nebus nei pelningas, nei nuostolingas?

Į šį klausimą galima atsakyti išmokus apskaičiuoti *matematinę viltį*. Tarkime, kad sukutis yra sureguliuotas taip, kad tikimybė rodyklei sustoti tam tikrame sektoriuje yra tiesiogiai proporcinga to sektoriaus plotui. Todėl:

$$\mathbf{P}(\text{rodyklė sustojo 10 centų sektoriuje}) = \tfrac{1}{2},$$
$$\mathbf{P}(\text{rodyklė sustojo 20 centų sektoriuje}) = \tfrac{1}{4},$$
$$\mathbf{P}(\text{rodyklė sustojo 30 centų sektoriuje}) = \tfrac{1}{8},$$
$$\mathbf{P}(\text{rodyklė sustojo 50 centų sektoriuje}) = \tfrac{1}{8}.$$



Kadangi išvardyti visi galimi įvykiai, tai jų tikimybių suma lygi 1:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=1.$$

Taigi žaidėjo išlošis X yra atsitiktinis dydis, kurio skirstinys yra

Išlošio X reikšmės	10	20	30	50
Tikimybės	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

Kavinės šeimininkas vidutinį žaidėjo laimėjimo dydį galėjo įvertinti taip. Tarkime, kad sukutis sukamas daug kartų, sakykime, 1000 kartų. Tikėtina, kad maždaug pusėje sukimų, t. y. apie 500 kartų, rodyklė sustos 10 centų sektoriuje, ketvirtadalyje sukimų, t. y. apie 250 kartų, rodyklė sustos 20 centų sektoriuje, aštuntadalyje sukimų, t. y. apie 125 kartus, 30 centų sektoriuje ir taip pat aštuntadalyje sukimų — apie 125 kartus — 50 centų sektoriuje.
Taigi per 1000 žaidimų žaidėjai išloš apie

$$10 \cdot 500 + 20 \cdot 250 + 30 \cdot 125 + 50 \cdot 125 \ (= 20\,000) \text{ centų.}$$

Vidutiniškai per vieną žaidimą žaidėjas išlošia apie

$$\frac{10 \cdot 500 + 20 \cdot 250 + 30 \cdot 125 + 50 \cdot 125}{1000} =$$
$$= 10 \cdot \frac{500}{1000} + 20 \cdot \frac{250}{1000} + 30 \cdot \frac{125}{1000} + 50 \cdot \frac{125}{1000} =$$
$$= 10 \cdot \frac{1}{2} + 20 \cdot \frac{1}{4} + 30 \cdot \frac{1}{8} + 50 \cdot \frac{1}{8} = 20 \text{ (centų).}$$

Taip samprotaudami tą patį vidutinį išlošį gautume, jei tartume, kad buvo žaista 3000 ar 10 000 kartų. Matome, kad paskutinėje skaičiavimų eilutėje visos galimos atsitiktinio išlošio reikšmės padaugintos iš tikimybių tą sumą išlošti ir tos sandaugos sudėtos. Gauta suma ir vadinama atsitiktinio dydžio X matematine viltimi, kurią žymime $\mathbf{E}X$. Taigi

$$\mathbf{E}X = 10 \cdot \mathbf{P}(10\,\text{ct}) + 20 \cdot \mathbf{P}(20\,\text{ct}) + 30 \cdot \mathbf{P}(30\,\text{ct}) + 50 \cdot \mathbf{P}(50\,\text{ct}) =$$
$$= 10 \cdot \frac{1}{2} + 20 \cdot \frac{1}{4} + 30 \cdot \frac{1}{8} + 50 \cdot \frac{1}{8} = 20\,(\text{ct}).$$

Kadangi žaidėjas moka 20 ct už bilietą, tai reiškia, kad žaidimas nėra naudingas nei žaidėjui, nei kavinės šeimininkui.
Matematinė viltis $\mathbf{E}X$ yra „teorinis“ vidutinis išlošis. Tai reiškia, kad, žaidžiant šį žaidimą daug kartų, išlošis, tenkantis vienam bandymui, turėtų būti artimas 20 centų.
Panašiai apibrėžiama ir bet kurio atsitiktinio dydžio X matematinė viltis. Sakykime, kad atsitiktinis dydis X įgyja k reikšmių $x_1, x_2, \dots, x_k$ su tikimybėmis $p_1, p_2, \dots, p_k$. Užrašykime tai lentele:

Atsitiktinio dydžio X reikšmės	x_1	x_2	...	x_k
Tikimybės	p_1	p_2	...	p_k

Kadangi kuri nors reikšmė bandymo metu būtinai įgyjama, tai

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_k = 1.$$

Atsitiktinio dydžio X matematinė viltis lygi:

$$\mathbf{E}X = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \cdots + x_k p_k.$$

Pratimai ir uždaviniai

401. Atsitiktinio dydžio skirstinys yra pateiktas lentele. Raskite jo matematinę viltį:

a)

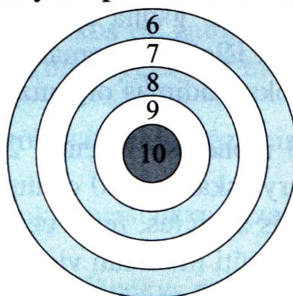
X	1	3	5
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$

b)

Y	−2	0	4	6
P	0,2	0,4	0,1	0,3

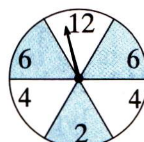
402. Sportininko pataikymo į taikinį tikimybės pateiktos lentelėje:

Taškų skaičius	Tikimybė
6	0,05
7	0,10
8	0,15
9	0,50
10	0,20

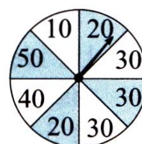


Kokia šio sportininko vienu šūviu gautų taškų matematinė viltis?

403. Loterijos ratas padalytas į 6 lygias dalis ir sužymėtas taip, kaip parodyta paveiksle.
Laimėjimo dydis litais — išsuktas skaičius minus bilieto kaina. Ratas sukamas vieną kartą.
Apskaičiuokite žaidėjo išlošio matematinę viltį, kai vienas rato pasukimas kainuoja: a) 4 litus; b) 6 litus.



404. Loterijos ratas padalytas į 8 lygius sektorius.
Laimėjimo dydis — išsuktas skaičius (centais). Kokia turėtų būti minimali vieno pasukimo kaina, kad loterija nebūtų nuostolinga žaidėjui?



405. Iš 300 bilietų vienas yra laimingas. Laimėjimo dydis — 150 litų. Loreta nusipirko vieną bilietą. Kokia išlošio matematinė viltis?

406. Loterijai atspausdinta 1000 bilietų. 200 jų laimi po 1 Lt, 100 — po 5 Lt, 50 — po 20 Lt, 50 — po 30 Lt, 600 bilietų — be laimėjimų. Kiek mažiausiai turėtų kainuoti vienas bilietas, kad loterija būtų nenuostolinga organizatoriams (į organizavimo išlaidas neatsižvelgiama)?

407. Panagrinėkite tokį žaidimą: žaidėjas meta kauliuką vieną kartą ir gauna tiek litų, kiek akučių iškrito.

a) Kokia kiekvieno laimėjimo dydžio tikimybė?

b) Kokia išlošio matematinė viltis metant kauliuką vieną kartą?

408. Žaidime dalyvaujantis žaidėjas meta dvi monetas ir gauna 1 litą, jei iškrito abu skaičiai, o kitais atvejais jis nelaimi nieko.

a) Apskaičiuokite, kam lygi tikimybė, kad žaidėjas laimi 1 litą (t. y. kad metus dvi monetas iškrito du skaičiai).

b) Kokia gali būti didžiausia vieno metimo kaina, kad žaidimas nebūtų nuostolingas žaidėjui?

409. Žaidime dalyvaujantis žaidėjas, sumokėjęs 3 litus, meta dvi monetas vieną kartą. Jei iškrenta du skaičiai, žaidėjas gauna 6 litus, jei iškrenta vienas skaičius, žaidėjas gauna 3 litus, o jei skaičius neiškrenta, jis negauna nieko. Kokia išlošio matematinė viltis metant monetas vieną kartą? Ar pelningas toks žaidimas organizatoriams?

410. Metamos 3 monetos: 1 cento, 2 centų ir 5 centų. Žaidėjas laimi 1 litą, jei iškrito trys skaičiai, 50 centų — jei iškrito du skaičiai, 20 centų — jei iškrito vienas skaičius, ir 10 centų — jei iškrito trys herbai.
Kokia turėtų būti minimali vieno metimo kaina, kad žaidimas nebūtų nuostolingas organizatoriams?

411. Išspręskite nelygybę:

a) $\frac{x}{3} - \frac{4}{x} > \frac{4}{3}$; b) $\frac{7x-5}{x+1} > x$; c) $x^2 - 6x < 0$.

412. Dviejų skaičių aritmetinis vidurkis lygus 20, o jų geometrinis vidurkis lygus 12. Raskite tuos skaičius.

413. Geometrinės progresijos (b_n) pirmasis narys lygus $2\sqrt{2}$, o vardiklis yra lygus $\sqrt{2}$. Raskite:

a) b_3; b) b_5; c) S_9; d) S_7.

414. Už kiek litų pirkta maisto produktų, jeigu juos perkant sumokėtas pridėtosios vertės mokestis sudarė:

a) 3,24 Lt; b) 8,46 Lt?

415. Į apskritimą įbrėžto keturkampio trijų iš eilės paimtų kampų didumų santykiai yra 1 : 2 : 3. Raskite keturkampio kampus.

416. Du kūnai, judėdami tolygiai apskritimu viena kryptimi, susitinka kas 56 min, o judėdami priešingomis kryptimis — kas 8 min. Abiem kūnams judant apskritimu priešingomis kryptimis, tam tikru momentu atstumas tarp jų buvo 42 m, o po 24 sekundžių — 28 m. Raskite kūnų greičius ir apskritimo ilgį.

417. Atstumas tarp dviejų dviratininkų, važiuojančių viena kryptimi, lygus 6 km. Per minutę vienas dviratininkas priartėja prie kito $\frac{1}{15}$ km.

a) Koks atstumas tarp dviratininkų bus po 45 min; 54 min; 72 min; 10 min?

b) Po kiek minučių atstumas tarp dviratininkų bus $1\frac{1}{3}$ km; $\frac{1}{3}$ km?

418. Bandomajam matematikos egzaminui atsitiktinai išrinkti 49 dešimtokai. Bandomojo egzamino rezultatai pateikti lentelėje:

Pažymys	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Mokinių skaičius	1	2	4	5	6	8	9	6	5	3

a) Nubraižykite bandomojo matematikos egzamino rezultatų stulpelinę diagramą.

b) Apskaičiuokite bandomojo matematikos egzamino rezultatų vidurkį.

c) Apskaičiuokite bandomojo matematikos egzamino rezultatų medianą.

d) Laikydami įvykių santykinius dažnius lygiais jų tikimybėms, apskaičiuokite tikimybes įvykių:

A — atsitiktinai išrinktas dešimtokas išlaikys egzaminą (gaus ne mažiau 4);

B — atsitiktinai išrinktas dešimtokas neišlaikys egzamino (gaus 1; 2 arba 3);

C — atsitiktinai išrinktas dešimtokas išlaikys egzaminą patenkinamai (gaus 4; 5 arba 6);

D — atsitiktinai išrinktas dešimtokas išlaikys egzaminą gerai (gaus 7 arba 8);

E — atsitiktinai išrinktas dešimtokas išlaikys egzaminą labai gerai (gaus 9 arba 10).

Pasitikrinkite

1. Yra 8 skirtingos saldainių rūšys. Kiek skirtingų galimybių turi Asta, jei ji nori paragauti:

a) du; b) tris skirtingų rūšių saldainius?

2. Benas parduotuvėje renkasi lauko teniso raketę ir kamuoliuką. Kiek skirtingų pasirinkimo galimybių jis turi, jei parduotuvėje yra 5 firmų rakečių ir 4 firmų kamuoliukų?

3. 6 mokiniai pageidauja kalbėti susirinkimo metu. Keliais skirtingais būdais galima sudaryti norinčių kalbėti sąrašą (eilės tvarka sudarant sąrašą yra svarbi)?

4. Miesto mokinių konferencijoje dalyvauja 24 vyresniųjų klasių mokiniai.

a) Keliais skirtingais būdais burtų keliu iš visų konferencijos dalyvių gali būti išrinkti mokinių tarybos pirmininkas, pavaduotojas ir sekretorius?

b) Keliais skirtingais būdais iš visų konferencijos dalyvių gali būti išrinkti 2 atstovai į šalies mokinių tarybą?

5. Kalėdiniame vakarėlyje dalyvavo 12 draugų. Susitikę jie pasisveikino, paspausdami vienas kitam ranką ir pasikeitė atvirukais su linkėjimais.

a) Kiek buvo rankų paspaudimų?

b) Kiek iš viso atvirukų buvo išdalyta?

6. Aido tėvai yra turistų klubo nariai. Klubą lanko 16 žmonių. Klubo prezidentas ir jo pavaduotojas renkami burtų keliu. Kokia tikimybė, kad Aido tėtis taps klubo prezidentu, o mama — pavaduotoja?

7. Triraidžiui kodui sudaryti vartojamos 3 skirtingos raidės iš 8.

a) Kiek skirtingų kodų galima sudaryti?

b) Kam lygi tikimybė atspėti kodą pirmuoju spėjimu?

8. Vienoje dėžėje yra 5 raudoni ir 4 balti rutuliai, sunumeruoti nuo 1 iki 9. Atsitiktinai traukiami 3 rutuliai.

a) Kiek yra skirtingų galimybių ištraukti 3 rutulius?

b) Kiek yra skirtingų galimybių ištraukti 3 raudonus rutulius?

c) Kam lygi tikimybė ištraukti 3 raudonus rutulius?

9. Apskaičiuokite: A_{12}^4, A_{14}^6, C_{20}^5, C_{14}^6, P_4, P_6.

10. Du šauliai nepriklausomai vienas nuo kito šauna į taikinį. Pirmojo šaulio pataikymo tikimybė lygi 0,8, antrojo — 0,6. Kokia tikimybė, kad:
a) abu šauliai pataikys į taikinį;
b) abu šauliai nepataikys į taikinį;
c) pirmas šaulys pataikys, o antras — ne;
d) pirmas šaulys nepataikys, o antras pataikys į taikinį?

11. Dviejose dėžėse yra vienodo dydžio, bet skirtingų spalvų rutuliai. Pirmoje dėžėje yra 6 raudoni ir 4 balti rutuliai, o antroje — 4 raudoni, 2 balti ir 2 žali rutuliai. Iš abiejų dėžių atsitiktinai ištraukiama po vieną rutulį. Kokia tikimybė, kad:
a) abu ištraukti rutuliai yra raudoni;
b) abu ištraukti rutuliai yra balti;
c) iš pirmos dėžės ištrauktas rutulys yra baltas, o iš antros — raudonas;
d) iš pirmos dėžės ištrauktas rutulys yra raudonas, o iš antros — žalias?

12. Ar pateiktos lentelės gali išreikšti kurio nors atsitiktinio dydžio skirstinį? Jei taip — raskite jo matematinę viltį.

a)

X	0	5	10	15
P	0,1	0,3	0,5	0,1

b)

Y	2	4	6
P	$\frac{1}{7}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{5}{7}$

c)

Z	-5	0	1	5
P	$\frac{1}{20}$	0,75	$\frac{3}{40}$	0,125

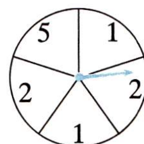
d)

W	10	20	30
P	$\frac{1}{3}$	0,5	$\frac{1}{6}$

13. Tikimybė laimėti loterijoje 50 litų lygi 0,01; 10 litų — 0,03; 5 litus — 0,2; 1 litą — 0,5; nelaimėti nieko — 0,26. Kokia žaidėjo išlošio matematinė viltis?

14. Metamos trys monetos: 1 cento, 2 centų, 5 centų. Atsitiktinis dydis X — atvirtusių skaičiumi monetų nominalų suma. Užrašykite jo skirstinį.

15. Loterijos ratas padalytas į 5 lygius sektorius. Laimėjimo dydis litais — išsuktas skaičius. Kokia turėtų būti minimali vieno pasukimo kaina, kad loterija nebūtų nuostolinga žaidėjui?



16. Su kuriomis x reikšmėmis reiškinio x^2 skaitinės reikšmės:

a) didesnės už 9 b) mažesnės už 16
c) ne didesnės už 100 d) ne mažesnės už 64?

17. Išspręskite nelygybę:

a) $-x^2 + 4x < 0$ b) $6x - x^2 > 0$ c) $-x^2 + 6x - 9 \geqslant 0$

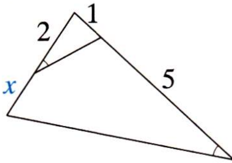
d) $-x^2 + 8x - 16 \geqslant 0$ e) $\frac{x^2-x-6}{x-7} \geqslant 0$ f) $\frac{x^2-3x+2}{x-3} \leqslant 0$

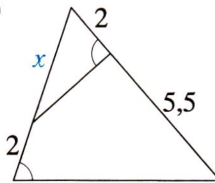
18. Stačiakampio gretimų kraštinių ilgių skirtumas lygus:
a) 5 cm, o šio stačiakampio plotas yra 150 cm^2;
b) 6 cm, o šio stačiakampio plotas yra 135 cm^2.
Raskite stačiakampio kraštinių ilgius.

19. 24 cm ilgio žvakė degdama sutrumpėja 2 cm per pusvalandį.
a) Per kiek valandų sudegs žvakė?
b) Po kiek degimo valandų žvakės ilgis bus 18 cm; 8 cm?

20. Vieno kvadrato plotas lygus 72 cm^2, o kito — 2 cm^2.
a) Kiek kartų pirmojo kvadrato kraštinė yra ilgesnė už antrojo kvadrato kraštinę?
b) Raskite kvadratų perimetrus.

21. Raskite x:

a) 

b) 

22. Ritinio ašinio pjūvio įstrižainė lygi 13 cm. Šio ritinio aukštis lygus 12 cm. Raskite ritinio:
a) pagrindo plotą;
b) šoninio paviršiaus plotą;
c) viso paviršiaus plotą;
d) tūrį.

23. Išskaidykite dauginamaisiais:
a) $a^3 + a^2 + a + 1$; b) $a^3 + a^2 - a - 1$.

6 SMAILIOJO KAMPO TRIGONOMETRINĖS FUNKCIJOS

1. Smailiojo kampo sinusas 134
2. Smailiojo kampo kosinusas 141
3. Smailiojo kampo tangentas 148
4. Stačiųjų trikampių sprendimas 155
Pasitikrinkite 163

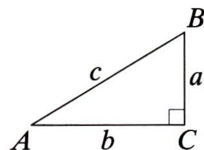


1 Smailiojo kampo sinusas

Aštuntoje klasėje įrodėme Pitagoro teoremą, kad stačiojo trikampio įžambinės kvadratas lygus statinių kvadratų sumai:

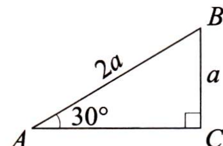
$$c^2 = a^2 + b^2.$$

Iš šitos lygybės matome, kad įžambinė yra ilgesnė už bet kurį statinį: $c > a$, $c > b$.



Taip pat žinome, kad statinis, esantis prieš 30° kampą, lygus pusei įžambinės. Vadinasi

$$\frac{\text{statinis, esantis prieš } 30^\circ \text{ kampą}}{\text{įžambinė}} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}.$$

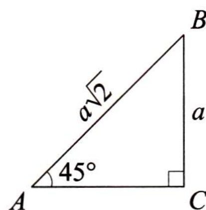


Rasime statinio, esančio prieš 45° kampą, ir įžambinės santykį. Sakykime, kad $\angle A = 45^\circ$. Kadangi $\angle A + \angle B = 90^\circ$, tai $\angle B = 45^\circ$. Taigi statusis trikampis, kurio vienas kampas lygus 45°, yra lygiašonis.

Jo statinių ilgius pažymėję raide a, pagal Pitagoro teoremą randame įžambinę: $c = a\sqrt{2}$.

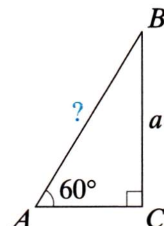
Apskaičiuojame santykį

$$\frac{\text{statinis, esantis prieš } 45^\circ \text{ kampą}}{\text{įžambinė}} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

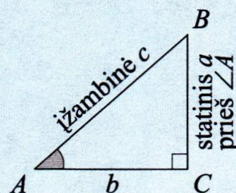


Užduotis. Įrodykite, kad stačiajame trikampyje santykis

$$\frac{\text{statinis, esantis prieš } 60^\circ \text{ kampą}}{\text{įžambinė}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$



Stačiojo trikampio smailiojo kampo sinusu vadinamas prieš tą kampą esančio statinio ir įžambinės ilgių santykis.



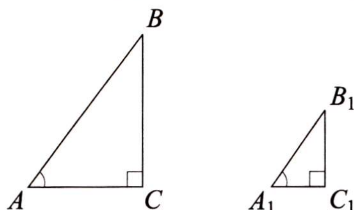
Kampo A sinusą žymėsime $\sin A$. Taigi

$$\boxed{\sin A = \frac{\text{statinis, esantis prieš kampą } A}{\text{įžambinė}}} \quad \text{t. y.} \quad \sin A = \frac{BC}{AB} = \frac{a}{c}.$$

Kadangi įžambinė yra ilgesnė už bet kurį statinį, t. y. $c > a$, tai $\frac{a}{c} < 1$. Vadinasi, $\sin A < 1$. Analogiškai galima įsitikinti, kad $\sin B < 1$.

Įsitikinsime, kad *stačiuosiuose trikampiuose, kurių smailieji kampai lygūs, lygūs ir tų kampų sinusai.*

Brėžinyje pavaizduoti du statieji trikampiai ABC ir $A_1B_1C_1$, kurių kampai C ir C_1 — statieji, o smailieji kampai A ir A_1 lygūs.



Šie trikampiai yra panašūs pagal du lygius kampus, todėl

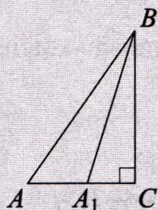
$$\frac{BC}{AB} = \frac{B_1C_1}{A_1B_1}, \quad \text{t. y.} \quad \sin A = \sin A_1.$$

Vadinasi, kampo sinuso reikšmė nepriklauso nuo to, kokį statųjį trikampį nagrinėsime. Taigi galima kalbėti apie kampo sinusą, nesiejant kampo su stačiuoju trikampiu.
Jau anksčiau įsitikinome, kad

$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}, \quad \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

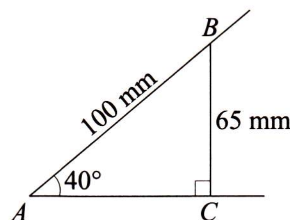
Beje, iš šių lygybių pastebime, kad didesnę kampo reikšmę atitinka didesnė sinuso reikšmė.

Įrodysime, kad, didėjant smailiajam kampui, to kampo sinusas didėja.
Įrodymas. Brėžinyje pavaizduoti du statieji trikampiai ABC ir A_1BC, turintys bendrą statinį BC, bet nelygius prieš jį esančius kampus: $\angle BAC < \angle BA_1C$.



Kadangi $AC > A_1C$, o $AB^2 = BC^2 + AC^2$, $A_1B^2 = BC^2 + A_1C^2$, tai $AB > A_1B$ ir $\frac{BC}{AB} < \frac{BC}{A_1B}$, t. y. $\sin A < \sin A_1$.

Žinant kampo didumą, galima rasti to kampo sinusą ir atvirkščiai, žinant kampo sinusą, galima rasti ir patį kampą.



1 PAVYZDYS. Apskaičiuokime $\sin 40^\circ$ reikšmę.
1. Su matlankiu nubrėžiame kampą A, lygų 40°.
2. Vienoje kampo kraštinėje atidedame bet kokio ilgio atkarpą AB, pavyzdžiui, $AB = 100\,\text{mm}$.
3. Iš taško B į kitą kampo kraštinę nubrėžiame statmenį BC ir išmatuojame jo ilgį: $BC \approx 65\,\text{mm}$.
4. Apskaičiuojame santykį $\frac{BC}{AB} \approx \frac{65}{100} = 0{,}65$. Taigi $\sin 40^\circ \approx 0{,}65$.

Pastaba. Tikslesnę $\sin 40^\circ$ reikšmę galime apskaičiuoti skaičiuokliu arba rasti vadovėlio gale esančioje lentelėje.

Skaičiuoklį nustatę į padėtį „DEG“ pagal schemą

[4] [0] [sin] [=] gauname $0{,}642787609$.

Vadovėlio gale esančioje lentelėje smailiųjų kampų sinusų reikšmės pateiktos tūkstantųjų tikslumu. Sinusų stulpelyje randame, kad $\sin 40^\circ \approx 0{,}643$. Spręsdami uždavinius, apsiribosime sinusų reikšmėmis tūkstantųjų tikslumu.

2 PAVYZDYS. Apskaičiuokime $\sin 25^\circ 33'$ remdamiesi lentele, o po to skaičiuokliu.

Iš lentelės matyti, kad $\sin 25^\circ 33'$ reikšmė yra tarp $\sin 25^\circ$ reikšmės 0,423 ir $\sin 26^\circ$ reikšmės 0,438. Laikysime, kad, mažai kintant kampo reikšmei, sinusas kinta proporcingai kampo kitimui. Taigi 1° kampo pokytį atitinka sinuso $0{,}438 - 0{,}423 = 0{,}015$ pokytis. Kai kampas padidėja $33'$, jo sinusas padidėja $\frac{0{,}015 \cdot 33}{60} = 0{,}008$.

Vadinasi, $\sin 25^\circ 33' \approx 0{,}423 + 0{,}008 = 0{,}431$.

Skaičiuokliu $\sin 25^\circ 33'$ skaičiuojame taip (skaičiuoklio padėtis „DEG“):

[2] [5] [+] [3] [3] [:] [6] [0] [=] [sin] gauname 0,431298587.

Taigi $\sin 25^\circ 33' \approx 0{,}431$.

Pastaba. Jeigu kampo reikšmė duota radianais, to kampo sinusą skaičiuokliu skaičiuojame skaičiuoklį nustatę į padėtį „RAD“.

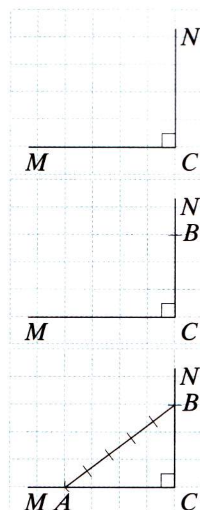
Pavyzdžiui, $\sin \frac{2\pi}{15}$ reikšmę skaičiuojame taip:

[2] [:] [1] [5] [×] [INV] [π] [=] [sin] gauname $\approx 0{,}407$;

o $\sin 1{,}2$ — taip:

[1] [·] [2] [sin] gauname $\approx 0{,}932$.

3 PAVYZDYS. Nubraižykime kampą A, kai $\sin A = \frac{3}{5}$, ir apskaičiuokime jo didumą.



1. Nubraižome statųjį kampą MCN.

2. Vienoje kampo kraštinėje atidedame 3 ilgio vienetų atkarpą CB.

3. Iš taško B, kaip iš centro, spinduliu, lygiu tokiems pat 5 ilgio vienetams, brėžiame lankelį, kuris kerta kitą kampo kraštinę taške A. Sujungę taškus B ir A atkarpa gauname statųjį trikampį ACB. Kampas A yra ieškomasis, nes $\sin A = \frac{BC}{AB} = \frac{3}{5}$.

4. Matlankiu išmatuojame kampo A didumą: $\angle A \approx 37°$.

Pastaba. Kampo A reikšmę galima rasti lentelėje, esančioje vadovėlio gale, arba apskaičiuoti skaičiuokliu. Stulpelyje „sin" ieškome skaičiaus $0{,}600(= \frac{3}{5})$ arba mažiausiai nuo jo besiskiriančio skaičiaus. Toks skaičius lentelėje yra 0,602. Jį atitinka 37° kampas. Taigi $\angle A \approx 37°$.

Skaičiuokliu kampo A reikšmę randame taip (skaičiuoklio padėtis „DEG"):

[0] [·] [6] [INV] [$\sin^{-1}$] gauname 36,870°.

Iš tikrųjų, kampas A yra mažesnis už 37°. Lentelėje randame, kad $\sin 36° \approx$ $\approx 0{,}588$. Kadangi $\sin 37° \approx 0{,}602$, tai tų kampų $1°$ $(= 37° - 36°)$ pokytį atitinkantis jų sinusų pokytis yra lygus $0{,}602 - 0{,}588 = 0{,}014$.

Turime:

$$\begin{aligned} 60' &— 0{,}014, \\ x \text{ minučių} &— (0{,}602 - 0{,}600); \end{aligned} \quad \Rightarrow x = \frac{0{,}002 \cdot 60}{0{,}014} \approx 9 \text{ (minutės).}$$

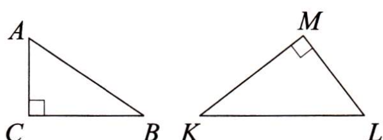
Kadangi, kampui mažėjant, sinusas mažėja, tai $\angle A \approx 37° - 9' = 36°51'$. Skaičiuodami skaičiuokliu buvome gavę, kad $\angle A \approx 36{,}87°$. Laipsnio dalis paversime minutėmis:

$$\begin{aligned} 1° &— 60 \text{ minučių}, \\ 0{,}87° &— x \text{ minučių}; \end{aligned} \quad \Rightarrow x = 0{,}87 \cdot 60 = 52'.$$

Taigi $\angle A \approx 36°52'$.

Pratimai ir uždaviniai

419. Pasakykite, kas turėtų būti parašyta vietoj daugtaškių.



$\sin A = \frac{\dots}{\dots}$ $\sin K = \frac{\dots}{\dots}$

$\sin B = \frac{\dots}{\dots}$ $\sin L = \frac{\dots}{\dots}$

420. Naudodamiesi matlankiu nubraižykite statųjį trikampį, kurio vienas kampas lygus:
a) $34°$; b) $53°$; c) $\frac{2\pi}{5}$; d) $\frac{2\pi}{9}$.
Išmatavę reikiamas trikampio kraštines, apskaičiuokite apytiksles reikšmes:
1) $\sin 34°$; 2) $\sin 53°$; 3) $\sin \frac{2\pi}{5}$; 4) $\sin \frac{2\pi}{9}$.
Gautą rezultatą patikrinkite skaičiuokliu.

421. Nubraižykite kampą A, kurio sinusas lygus:
a) $0,25$; b) $\frac{3}{4}$; c) $\frac{1}{10}$; *d) $\frac{1}{\sqrt{3}}$.
Naudodamiesi matlankiu raskite apytikslį jo didumą.

422. Įrodykite, kad jeigu A ir B yra stačiojo trikampio smailieji kampai, tai $\sin^2 A + \sin^2 B = 1$.

423. Kas daugiau:
a) $\sin 23°$ ar $\sin 67°$; b) $\sin 42°$ ar $\frac{1}{2}$; c) $\sin 24°$ ar $\frac{1}{2}$?

424. Išdėstykite didėjimo tvarka: $\sin 23°$, $\sin 41°$, $\sin \frac{2\pi}{5}$, $\sin 30°$, $\sin \frac{2\pi}{7}$.

425. Naudodamiesi lentele, raskite:
a) $\sin 20°$; b) $\sin 70°$; c) $\sin 35°53'$; d) $\sin 76°16'$.
Gautą rezultatą patikrinkite skaičiuokliu.

426. Naudodamiesi lentele, raskite smailiojo kampo didumą ($1°$ tikslumu), jeigu jo sinusas lygus:
a) $0,515$; b) $0,986$; c) $0,584$.
Gautą rezultatą patikrinkite skaičiuokliu.

427. Stačiajame trikampyje ABC ($\angle C = 90°$) $BC = 5$ cm, $AB = 9$ cm.
1) Nubraižykite trikampį ABC.
2) Apskaičiuokite tikslų statinio AC ilgį.
3) Apskaičiuokite kampo ABC didumą $1°$ tikslumu.
4) Apskritimas, kurio centras B, o spindulys BC, kerta įžambinę AB taške M. Tiesė, einanti per tašką M ir lygiagreti statiniui AC, kerta statinį BC taške N. Apskaičiuokite tikslų atkarpos BN ilgį.

428. 1) Nubraižykite natūralaus dydžio stačiakampį $ABCD$, kurio kraštinės $AB = 6{,}4$ cm, $BC = 4{,}8$ cm.

2) Apskaičiuokite kampo ACD didumą (1° tikslumu) ir pasitikrinkite matlankiu.

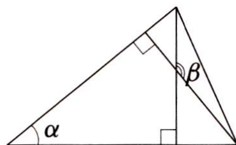
3) Nubrėžkite atkarpos AC vidurio statmenį ir jo susikirtimo su tiese AB tašką pažymėkite raide E.

4) Įrodykite, kad $\angle ECD = 2\angle ACD$.

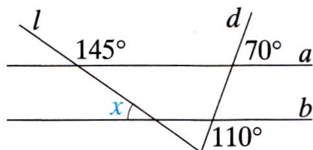
429. Stačiajame trikampyje ABC ($\angle C = 90^\circ$): $CB = 60$ mm, $\sin B = \frac{3}{5}$. Raskite AB.

430. Trikampio ABC kampas B lygus 70°. Kampo A pusiaukampinė ir tiesė, kurioje yra priekampio C pusiaukampinė, susikerta taške D. Apskaičiuokite $\angle ADC$.

431. $\alpha + \beta = ?$



432. Apskaičiuokite kampą x.



433. Konferencijoje bus skaitomi 8 pranešimai. Keliais skirtingais būdais galima sudaryti konferencijos pranešimų programą (sąrašą)?

434. Kiek keturženklių skaičių, neturinčių vienodų skaitmenų, galima sudaryti iš skaitmenų:

a) 1, 2, 3, 4; b) 1, 2, 3, 4, 5; c) 0, 1, 2, 3; d) 0, 1, 2, 3, 4?

435. Išspręskite nelygybę:

a) $x^2 + 9 < 6x$; b) $(2 - x)x < 1$; c) $100x^2 < 1$; d) $x > x^2$.

436. Apskaičiuokite stačiakampio kraštines, jei jo įstrižainė lygi 25 cm, o perimetras yra:

a) 62 cm; b) 70 cm.

437. Parašykite lygtį tiesės, einančios per taškus:

a) $A(-2; -5)$ ir $B(3; 5)$; b) $C(-4; 7)$ ir $D(4; -1)$.

438. Trupmenos skaitiklis 2 vienetais mažesnis už vardiklį. Jeigu prie skaitiklio pridėtume 2, o iš vardiklio atimtume 1, tai gautume trupmeną, 4,5 karto didesnę už duotąją trupmeną. Raskite duotąją trupmeną.

439. Apie apskritimą apibrėžta stačioji trapecija, kurios šoninių kraštinių ilgiai yra 24 cm ir 25 cm. Apskaičiuokite:

a) trapecijos perimetrą;
b) trapecijos pagrindus;
c) trapecijos vidurinę liniją;
d) trapecijos plotą;
e) trapecijos įstrižaines;
f) apskritimo ilgį;
g) kiek procentų trapecijos perimetras ilgesnis už apskritimo ilgį;
h) trapecijos ploto dalį, esančią skritulio išorėje;
i) trapecijos ir skritulio plotų santykį.

440. Su kuriomis x reikšmėmis duotųjų reiškinių skaitinės reikšmės yra lygios:
a) $(x-3)^2+(x+4)^2-(x-5)^2$ ir $17x+24$;
b) $(x+5)^2+(x-2)^2+(x-7)(x+7)$ ir $11x+30$?

441. Kokia turi būti kintamojo x reikšmė, kad duotojo trinario reikšmė būtų didžiausia?
a) $-x^2+7x-12$; b) $-4x^2-12x-9$.

442. Apskaičiuokite skaičių $5\cdot10^{-5}$ ir $8\cdot10^{-4}$:
a) sumą; b) skirtumą; c) sandaugą; d) dalmenį.
Rezultatą parašykite standartine išraiška.

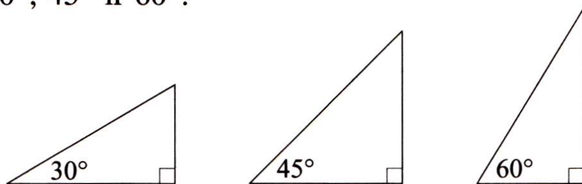
443. Kasant šulinį, pirmojo žiedo įkasimas kainuoja 20 Lt, o kiekvieno kito — 25 Lt brangiau, negu prieš tai buvusio.
a) Parašykite formulę n-tojo žiedo įkasimo kainai (litais) apskaičiuoti.
b) Kiek kainuoja 8-ojo žiedo; 12-ojo žiedo įkasimas?
c) Kurio žiedo įkasimas kainuoja 145 Lt; 270 Lt?
d) Kiek kainuoja šešių žiedų; devynių žiedų šulinio iškasimas?

444. Maršrutu važinėja trys autobusai kas 30 min. Kokiu laiko intervalu važinėtų šiuo maršrutu penki autobusai, važinėjantys kaip ir anie tuo pačiu vidutiniu greičiu?

A 20 min **B** 18 min **C** 16 min **D** 15 min **E** 12 min

2 Smailiojo kampo kosinusas

Užduotis. Brėžinyje pavaizduoti trys statieji trikampiai, kurių vienas kampas yra 30°, 45° ir 60°.



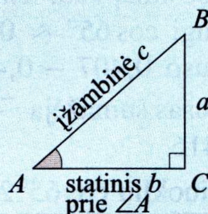
Įrodykite, kad:

$$\frac{\text{statinis, esantis prie } 30^\circ \text{ kampo}}{\text{įžambinė}} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\frac{\text{statinis, esantis prie } 45^\circ \text{ kampo}}{\text{įžambinė}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\frac{\text{statinis, esantis prie } 60^\circ \text{ kampo}}{\text{įžambinė}} = \frac{1}{2}.$$

Stačiojo trikampio smailiojo kampo kosinusu vadinamas prie to kampo esančio statinio ir įžambinės ilgių santykis.



Kampo A kosinusą žymėsime $\cos A$. Taigi

$$\cos A = \frac{\text{statinis, esantis prie kampo } A}{\text{įžambinė}} \quad \text{t. y.} \quad \cos A = \frac{AC}{AB} = \frac{b}{c}.$$

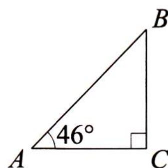
Kadangi $c > b$, tai $\frac{b}{c} < 1$ ir $\cos A < 1$.
Remiantis stačiųjų trikampių panašumu nesunku įsitikinti, kad stačiuosiuose trikampiuose, kurių smailieji kampai lygūs, lygūs ir tų kampų kosinusai.
Anksčiau įsitikinome, kad

$$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

Matome, kad didesnę kampo reikšmę atitinka mažesnė kosinuso reikšmė.

Žinant kampo didumą, galima rasti to kampo kosinusą ir atvirkščiai, žinant kampo kosinusą, galima nubraižyti patį kampą ir rasti jo didumą.

1 PAVYZDYS. Apskaičiuokime $\cos 46^\circ$.



1. Su matlankiu nubraižome kampą A, lygų 46°.
2. Vienoje kampo kraštinėje atidedame bet kokio ilgio atkarpą AB, pavyzdžiui, $AB = 5\,\text{cm}$.
3. Iš taško B į kitą kampo kraštinę nubrėžiame statmenį BC.
4. Išmatuojame AC ilgį: $AC \approx 3{,}5\,\text{cm}$.
5. Apskaičiuojame santykį $\frac{AC}{AB} \approx \frac{3{,}5}{5} = 0{,}7$. Taigi $\cos 46^\circ \approx \frac{3{,}5}{5} = 0{,}7$.

Pastaba. Skaičiuoklį nustatę į padėtį „DEG“ pagal algoritmą

| 4 | 6 | cos | = | gauname 0,69465837.

Iš lentelės randame, kad $\cos 46^\circ \approx 0{,}695$.
Taigi $\cos 46^\circ \approx 0{,}695$.

2 PAVYZDYS. Remdamiesi lentele arba su skaičiuokliu apskaičiuokime $\cos 65^\circ 28'$.

Pastebėsime, kad, kampui didėjant, kosinuso reikšmė mažėja.
Kadangi $\cos 65^\circ \approx 0{,}423$, o $\cos 66^\circ \approx 0{,}407$, tai 1° kampo pokytį atitinka kosinuso $0{,}407 - 0{,}423 = -0{,}016$ pokytis. Kai kampas padidėja $28'$, jo kosinusas sumažėja $\frac{-0{,}016 \cdot 28}{60} \approx -0{,}007$. Taigi $\cos 65^\circ 28' \approx 0{,}423 - 0{,}007 = 0{,}416$.

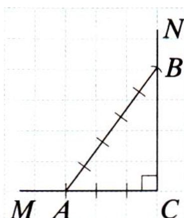
Skaičiuokliu $\cos 65^\circ 28'$ skaičiuojame taip (skaičiuoklio padėtis „DEG“):

| 6 | 5 | + | 2 | 8 | : | 6 | 0 | = | cos |

gauname $0{,}415222566 \approx 0{,}415$.
Taigi $\cos 65^\circ 28' \approx 0{,}415$.

3 PAVYZDYS. Nubraižykime kampą A, kurio $\cos A = \frac{3}{5}$ ir apskaičiuokime jo didumą.

Kaip ir 1 skyrelio 3 pavyzdyje, nubraižome statųjį trikampį ACB, kurio statinis AC lygus 3 ilgio vienetams, o įžambinė — 5 ilgio vienetams.
Kampas A yra ieškomas, nes $\cos A = \frac{AC}{AB} = \frac{3}{5}$.
Matlankiu išmatuojame kampo A didumą: $\angle A \approx 53^\circ$.



Pastaba. Kampo A reikšmę galima rasti lentelėje arba apskaičiuoti skaičiuokliu. Kosinusų stulpelyje ieškome 0,600 arba jai artimos reikšmės. Tai skaičius 0,602. Jį atitinka 53° kampas. Taigi $\angle A \approx 53^\circ$.

Skaičiuokliu kampo A reikšmę randame taip (skaičiuoklio padėtis „DEG“):

| 0 | · | 6 | INV | $\cos^{-1}$ | gauname $\approx 53{,}13^\circ$. |

Iš tikrųjų, kampas A yra didesnis už 53°.

Lentelėje randame, kad $\cos 54^\circ \approx 0{,}588$.

$$\begin{aligned} &60 \text{ minučių} - (0{,}602 - 0{,}588), \\ &x \text{ minučių} - (0{,}602 - 0{,}600); \end{aligned} \Rightarrow x = \frac{0{,}002 \cdot 60}{0{,}014} \approx 9 \text{ (minutės)}.$$

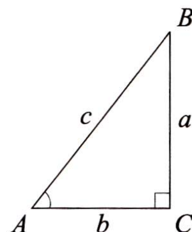
Kadangi, kampui didėjant, kosinusas mažėja, tai $\angle A = 53^\circ + 9' = 53^\circ 9'$. Skaičiuodami skaičiuokliu buvome gavę, kad $\angle A \approx 53{,}13^\circ$. Laipsnio dalis paversime minutėmis:

$$\begin{aligned} 1^\circ &- 60 \text{ minučių}, \\ 0{,}13^\circ &- x \text{ minučių}; \end{aligned} \Rightarrow x = 0{,}13 \cdot 60 \approx 8'.$$

Taigi $\angle A \approx 53^\circ 8'$.

To paties kampo A sinusas ir kosinusas susieti lygybe:

$$\boxed{\sin^2 A + \cos^2 A = 1}$$

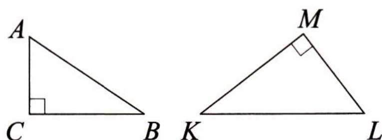


Iš tikrųjų, kadangi $\sin A = \frac{a}{c}$, $\cos A = \frac{b}{c}$, tai:

$$\sin^2 A + \cos^2 A = \frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = \frac{a^2 + b^2}{c^2} = 1.$$

Pratimai ir uždaviniai

445. Pasakykite, kas turėtų būti parašyta vietoj daugtaškių.



$\cos A = \frac{\dots}{\dots}$ $\cos K = \frac{\dots}{\dots}$

$\cos B = \frac{\dots}{\dots}$ $\cos L = \frac{\dots}{\dots}$

446. Naudodamiesi matlankiu nubraižykite statųjį trikampį, kurio vienas kampas yra:

a) $19°$; b) $70°$; c) $\frac{4\pi}{15}$; d) $\frac{4\pi}{9}$.

Išmatavę reikiamas trikampio kraštines apskaičiuokite apytiksles reikšmes:

1) $\cos 19°$; 2) $\cos 70°$; 3) $\cos \frac{4\pi}{15}$; 4) $\cos \frac{4\pi}{9}$.

Gautą rezultatą patikrinkite skaičiuokliu.

447. Nubraižykite kampą A, kurio kosinusas lygus:

a) 0,4; b) $\frac{2}{3}$; *c) $\frac{\sqrt{2}}{3}$; *d) $\frac{1}{\sqrt{5}}$.

Matlankiu raskite jo didumą.

448. Kas daugiau:

a) $\cos 27°$ ar $\cos 53°$; b) $\cos 61°$ ar $\frac{1}{2}$; c) $\cos 58°$ ar $\frac{1}{2}$?

449. Jeigu A ir B yra stačiojo trikampio smailieji kampai (t. y. $\angle A + \angle B = 90°$), tai $\sin A = \cos B$; $\sin B = \cos A$, t. y. $\sin(90° - A) = \cos A$, $\cos(90° - A) = \sin A$. Įrodykite.

450. Remdamiesi formule $\cos A = \sin(90° - A)$ įrodykite, kad, didėjant kampui A, to kampo kosinusas mažėja.

451. Patikrinkite, kad:

a) $\sin^2 30° + \cos^2 30° = 1$; b) $\sin^2 60° + \cos^2 60° = 1$;

c) $\sin^2 45° + \cos^2 45° = 1$.

452. a) Smailiojo kampo sinusas lygus 0,2. Apskaičiuokite šio kampo kosinusą.

b) Smailiojo kampo kosinusas lygus $\frac{1}{3}$. Apskaičiuokite šio kampo sinusą.

c) Apskaičiuokite $\sin\alpha$ ir $\cos\alpha$, jeigu žinoma, kad $\sin\alpha = \frac{3}{4}\cos\alpha$.

453. Naudodamiesi lentele raskite smailiojo kampo didumą, jeigu jo kosinusas lygus:

a) 0,669; b) 0,967; c) 0,468.

Gautą rezultatą patikrinkite skaičiuokliu.

454. Naudodamiesi lentele raskite:
a) $\cos 27^\circ$; b) $\cos 58^\circ$; c) $\cos 37^\circ 53'$; d) $\cos 74^\circ 12'$.
Gautą rezultatą patikrinkite skaičiuokliu.

455. Išdėstykite didėjančia tvarka:
$\cos 35^\circ$, $\cos 27^\circ$, $\cos \frac{7\pi}{15}$, $\cos \frac{7\pi}{20}$, $\cos 60^\circ$.

456. Suprastinkite:

a) $\frac{(1-\cos\alpha)(1+\cos\alpha)}{\sin^2\alpha}$ b) $\sin\alpha - \sin\alpha \cdot \cos^2\alpha$

c) $1 + \sin^2\alpha - \cos^2\alpha$ d) $\sin^4\alpha + \cos^4\alpha + 2\sin^2\alpha \cdot \cos^2\alpha$

457. Naudodamiesi lentele arba su skaičiuokliu raskite:
a) $\sin 46^\circ 25'$; b) $\sin 62^\circ 10'$; c) $\cos 32^\circ 45'$; d) $\cos 51^\circ 10'$.

458. Įrodykite, kad stačiajam trikampiui ABC ($\angle C = 90^\circ$) teisinga lygybė: $\cos^2 A + \cos^2 B = 1$.

459*. Iškilojo keturkampio $ABCD$ įstrižainėje BD pažymėtas taškas M ir per jį nubrėžtos tiesės, lygiagrečios kraštinėms DC ir AD. Jos kerta keturkampio kraštines BC ir AB atitinkamai taškuose E ir F. Įrodykite, kad $EF \parallel AC$.

460*. a) Keturkampis $ABCD$ — lygiagretainis. Kampų A ir B pusiaukampinės kerta tiesę, kurioje yra kraštinė DC, taškuose M ir N. Raskite atkarpos MN ilgį, jeigu $AB = a$, $AD = b$ ($b > a$).
b) Stačiakampio $ABCD$ kraštinės $AB = a$, $AD = b$. Kampų A ir D pusiaukampinės kerta kraštinę BC arba tiesę, kurioje yra BC, taškuose M ir N. Raskite atkarpos MN ilgį, kai: 1) $a > b$; 2) $a < b$.

461. Stačiajame trikampyje ABC: $\angle C = 90^\circ$, $\angle B = 60^\circ$. Iš kampo B išvesta pusiaukampinė yra 1 cm trumpesnė už ilgiausią statinį. Raskite pusiaukampinės ilgį.

462. Jeigu trikampio ABC pusiaukraštinė AD lygi pusei kraštinės BC, tai trikampis ABC yra statusis. Įrodykite.

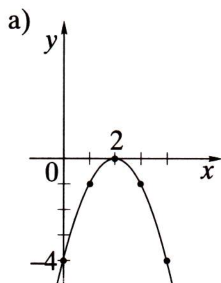
463. Kodui sudaryti vartojamos 4 skirtingos raidės iš 9.
a) Kiek skirtingų kodų galima sudaryti?
b) Kokia tikimybė atspėti kodą pirmu spėjimu?

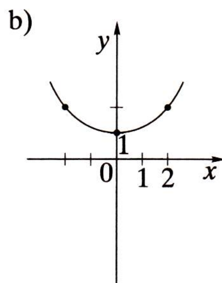
464. Ant keturių kortelių užrašytos raidės S, U, L, A. Kortelės užverčiamos ir sumaišomos. Atsitiktinai viena po kitos imamos kortelės ir dedamos viena šalia kitos iš kairės į dešinę. Apskaičiuokite tikimybę, kad bus sudėtas žodis ALUS.

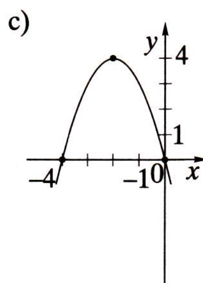
465. Išspręskite nelygybę:

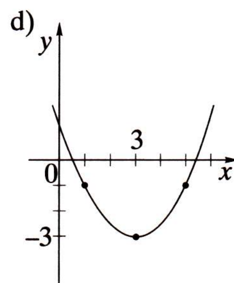
a) $4x - x^2 < 5$
b) $x(x+5) - 2 > 4x$
c) $-3 < 5 - 2x \leqslant 1$
d) $0 \leqslant \frac{1}{2}x - 3 < 1$
e) $(4 - x^2)^2(x-7)(x-8) \leqslant 0$
f) $(x^2 - 4x + 3)^2(x-4)(x-2) \leqslant 0$

466. Remdamiesi brėžiniu, raskite parabolės $y = ax^2 + bx + c$ koeficientus a, b ir c:

a) 

b) 

c) 

d) 

467. Kredito grąžintiną sumą (litais) $K(t)$ priklausomai nuo laiko t (metais) galima apskaičiuoti pagal formulę $K(t) = 8000 + 720t$, $t \leqslant 3$.

a) Kokio dydžio yra kreditas?
b) Apskaičiuokite kredito palūkanų normą.
c) Parašykite kredito palūkanų formulę P_t priklausomai nuo laiko t (metais).
d) Pagal kurią formulę galima būtų apskaičiuoti kredito grąžintiną sumą (litais) $K(t)$ priklausomai nuo laiko t (metais), jeigu reikėtų mokėti 9% metinių sudėtinių palūkanų?
e) Parašykite formulę, pagal kurią galima apskaičiuoti kredito grąžintiną sumą $K(m)$ priklausomai nuo mėnesių skaičiaus m.
f) Parašykite formulę, pagal kurią galima apskaičiuoti kredito grąžintiną sumą $K(d)$ priklausomai nuo dienų skaičiaus d.

468. Koks yra dviejų ritinių tūrių santykis, jeigu ritinių pagrindų spindulių santykis yra 1 : 2, o aukščių santykis — 1 : 4.

469. Suprastinkite reiškinį:

a) $\left(\frac{2a^2}{b}\right)^{-3}$; b) $\left(\frac{x^3}{3y^2}\right)^{-4}$; *c) $\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2} - \frac{x+y}{2x-2y}$; *d) $\frac{x+1}{x^2-x} - \frac{x+2}{2x^2-2}$.

470*. Išspręskite lygčių sistemą:

a) $\begin{cases} \frac{x+3}{2} - \frac{y-2}{3} = 2, \\ \frac{x-1}{4} + \frac{y+1}{3} = 4; \end{cases}$
b) $\begin{cases} \frac{2x-1}{5} + \frac{3y-2}{4} = 2, \\ \frac{3x+1}{5} - \frac{3y+2}{4} = 0. \end{cases}$

471. Nubraižykite funkcijos $y = -x^2 + 2x + 3$ grafiką. Nustatykite:

a) su kuriomis argumento reikšmėmis funkcijos reikšmė lygi nuliui;

b) kokia didžiausia funkcijos reikšmė;

c) su kuriomis argumento reikšmėmis funkcijos reikšmės didėja; mažėja;

d) su kuriomis argumento reikšmėmis funkcijos reikšmės yra neneigiamos; neteigiamos.

472. Darbdavys susitarė su darbininku už pirmą mėnesį mokėti jam 800 Lt, po to kas mėnesį jo atlyginimą didinant 5 Lt.

a) Parašykite darbininko atlyginimo (litais) priklausomai nuo laiko (mėnesiais) apskaičiavimo formulę.

b) Koks bus darbininko atlyginimas už dešimtąjį; penkioliktąjį; dvidešimtpenktąjį mėnesį; trisdešimtąjį mėnesį?

c) Už kurį mėnesį nuo įsidarbinimo darbininko atlyginimas bus 890 Lt; 975 Lt?

d) Kiek uždirbs darbininkas per 18 mėnesių; 27 mėnesius?

473*. Du aukso lydiniai, kurių vienas 950-os prabos, o kitas 800-os prabos, sulydyti su dviem gramais gryno aukso. Naujojo lydinio masė 25 gramai ir jis yra 906-os prabos.

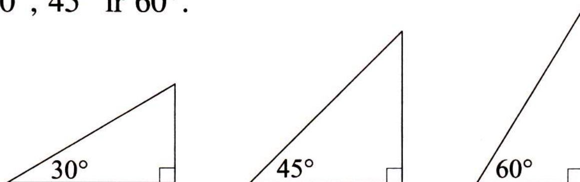
a) Kiek gramų aukso yra naujame lydinyje?

b) Kokia kiekvieno pirmųjų dviejų lydinių masė?

474. Užvakar man dar buvo 14 metų, o kitais metais sukaks 17 metų. Ar taip gali būti?

3 Smailiojo kampo tangentas

Užduotis. Brėžinyje pavaizduoti trys statieji trikampiai, kurių vienas kampas yra 30°, 45° ir 60°.



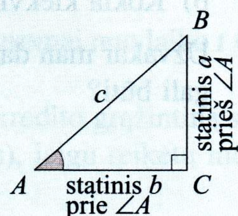
Įrodykite, kad:

$$\frac{\text{statinis, esantis prieš } 30^\circ \text{ kampą}}{\text{statinis, esantis prie } 30^\circ \text{ kampo}} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\frac{\text{statinis, esantis prieš } 45^\circ \text{ kampą}}{\text{statinis, esantis prie } 45^\circ \text{ kampo}} = 1,$$

$$\frac{\text{statinis, esantis prieš } 60^\circ \text{ kampą}}{\text{statinis, esantis prie } 60^\circ \text{ kampo}} = \sqrt{3}.$$

Stačiojo trikampio smailiojo kampo tangentu vadinamas prieš tą kampą esančio statinio ir prie to kampo esančio statinio ilgių santykis.



Kampo A tangentą žymėsime tg A. Taigi

$$\operatorname{tg} A = \frac{\text{statinis, esantis prieš kampą } A}{\text{statinis, esantis prie kampo } A} \qquad \text{t. y.} \quad \operatorname{tg} A = \frac{BC}{AC} = \frac{a}{b}.$$

Remiantis stačiųjų trikampių panašumu galima įsitikinti, kad stačiuosiuose trikampiuose, kurių smailieji kampai lygūs, lygūs ir tų kampų tangentai.
Atlikę užduotį įsitikinome, kad

$$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad \operatorname{tg} 45^\circ = 1, \quad \operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}$$

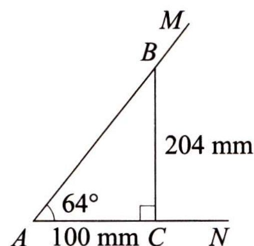
Matome, kad didesnę kampo reikšmę atitinka didesnė tangento reikšmė.

Kai duotas kampas, galima rasti to kampo tangentą ir atvirkščiai, žinant kampo tangentą, galima nubraižyti patį kampą ir rasti jo didumą.

1 PAVYZDYS. Apskaičiuokime $\operatorname{tg} 64^\circ$.

1. Su matlankiu nubraižome kampą MAN, lygų 64°.
2. Kampo kraštinėje AN atidedame atkarpą AC, lygią, pavyzdžiui, 100 mm.
3. Iš taško C nubrėžiame statmenį, kuris kraštinę AM kerta taške B.
4. Išmatuojame BC ilgį: $BC \approx 204$ mm.
5. Apskaičiuojame santykį $\frac{BC}{AC} \approx \frac{204}{100} = 2{,}04$.

Taigi $\operatorname{tg} 64^\circ \approx 2{,}04$.



Pastaba. Skaičiuoklį nustatę į padėtį „DEG“ pagal algoritmą

[6] [4] [tan] [=] gauname 2,050303842.

Iš lentelės randame, kad $\operatorname{tg} 64^\circ \approx 2{,}050$.
Taigi $\operatorname{tg} 64^\circ \approx 2{,}050$.

2 PAVYZDYS. Remdamiesi lentele arba su skaičiuokliu apskaičiuokime $\operatorname{tg} 23^\circ 18'$.

Kadangi

$$\operatorname{tg} 23^\circ \approx 0{,}424, \quad \text{o} \quad \operatorname{tg} 24^\circ \approx 0{,}445,$$

tai 1° kampo pokytį atitinka tangento

$$0{,}445 - 0{,}424 = 0{,}021$$

pokytis.
Kai kampas padidėja $18'$, jo tangentas padidėja $\frac{0{,}021 \cdot 18}{60} \approx 0{,}006$.
Taigi

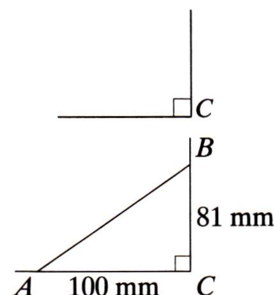
$$\operatorname{tg} 23^\circ 18' \approx 0{,}424 + 0{,}006 = 0{,}430.$$

Skaičiuodami skaičiuokliu pagal schemą

[2] [3] [+] [1] [8] [:] [6] [0] [=] [tan] gauname 0,430668039.

Taigi $\operatorname{tg} 23^\circ 18' \approx 0{,}431$.

3 PAVYZDYS. Nubraižykime kampą A, kurio $\operatorname{tg} A = 0{,}81$ ir apskaičiuokime jo didumą.



1. Nubraižome statųjį kampą C.

2. Vienoje kampo kraštinėje atidedame atkarpą CB, pavyzdžiui, lygią 81 mm, o kitoje kraštinėje — atkarpą CA, lygią 100 mm. Trikampis ABC — statusis, be to, $\operatorname{tg} A = \frac{BC}{AC} = \frac{81}{100} = 0{,}81$.

3. Matlankiu išmatuojame kampo A didumą: $\angle A \approx 39^\circ$.

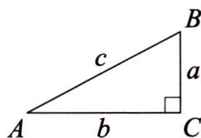
Pastaba. Skaičiuoklį nustatę į padėtį „DEG“ pagal algoritmą

[0] [·] [8] [1] [INV] [$\tan^{-1}$] gauname $39{,}00747255^\circ$.

Lentelėje tangento stulpelyje randame 0,81. Jis atitinka 39° kampą. Taigi $\angle A \approx 39^\circ$.

To paties kampo A sinusą, kosinusą ir tangentą sieja lygybė:

$$\operatorname{tg} A = \frac{\sin A}{\cos A}$$



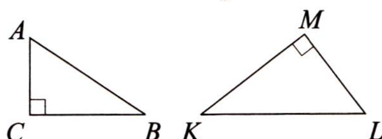
Iš tikrųjų, $\operatorname{tg} A = \frac{a}{b} = \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}} = \frac{\sin A}{\cos A}$.

Sudarysime kampų α, lygių 30°, 45°, 60° $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ ir $\operatorname{tg}\alpha$ reikšmių lentelę:

α	30°	45°	60°
$\sin\alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\operatorname{tg}\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Pratimai ir uždaviniai

475. Pasakykite, kas turėtų būti parašyta vietoj daugtaškių.



$\operatorname{tg} A = \frac{\dots}{\dots}$ $\operatorname{tg} K = \frac{\dots}{\dots}$

$\operatorname{tg} B = \frac{\dots}{\dots}$ $\operatorname{tg} L = \frac{\dots}{\dots}$

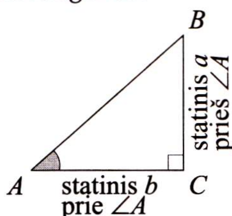
476. Naudodamiesi matlankiu nubraižykite kampą, lygų;
a) $20°$; b) $70°$; c) $\frac{2\pi}{9}$; d) $\frac{7\pi}{15}$.
Apskaičiuokite šio kampo tangentą.

477. Nubraižykite kampą, kurio tangentas lygus:
a) 0,49; b) $\frac{3}{5}$; c) 4; *d) $\frac{4}{\sqrt{5}}$.
Matlankiu išmatuokite šio kampo didumą.

478. a) $\sin\alpha = 0{,}2$. Apskaičiuokite $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$.
b) $\cos\alpha = \frac{2}{3}$. Apskaičiuokite $\sin\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$.
c) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{3}$. Apskaičiuokite $\sin\alpha$, $\cos\alpha$.

479. Dažnai stačiajame trikampyje nagrinėjamas statinio, esančio prie smailiojo kampo, ir statinio, esančio prieš smailųjį kampą, ilgių santykis. Jis vadinamas to kampo *kotangentu*.

Taigi $\operatorname{ctg} A = \frac{b}{a}$



a) Įrodykite: 1) $\operatorname{ctg} A = \frac{\cos A}{\sin A}$; 2) $\operatorname{tg} A \cdot \operatorname{ctg} A = 1$.
b) Apskaičiuokite: $\operatorname{ctg} 30°$, $\operatorname{ctg} 45°$, $\operatorname{ctg} 60°$.

480. Ar gali to paties kampo α tangentas ir kotangentas būti lygūs atitinkamai:
a) $\frac{5}{4}$ ir 0,8; b) $\frac{3}{5}$ ir $\frac{5}{4}$; c) $2-\sqrt{3}$ ir $2+\sqrt{3}$; d) $3-\sqrt{5}$ ir $3+\sqrt{5}$?

481. Įrodykite, kad:

a) $\operatorname{tg}(90° - \alpha) = \operatorname{ctg}\alpha$
b) $\operatorname{ctg}(90° - \alpha) = \operatorname{tg}\alpha$
c) $1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$
d) $1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$
e) $\sin^2\alpha = \frac{\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$
f) $\cos^2\alpha = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$

482. Apskaičiuokite:

a) $4\sin 30^\circ + 6\cos 60^\circ - 3\,\mathrm{tg}\, 45^\circ$;
b) $2\sin^2 45^\circ - 4\,\mathrm{tg}^2\, 60^\circ + 8\sin^2 60^\circ$;
c) $\frac{2\,\mathrm{tg}^2\, 60^\circ}{\cos^2 60^\circ - \cos^2 45^\circ}$.

483. Raskite:

a) $\mathrm{tg}(90^\circ - \alpha)$, jei $\mathrm{tg}\,\alpha = 2{,}5$; b) $\mathrm{ctg}(90^\circ - \alpha)$, jei $\mathrm{ctg}\,\alpha = \frac{10}{13}$.

484. Naudodamiesi lentele apskaičiuokite:
a) $\mathrm{tg}\, 35^\circ$; b) $\mathrm{tg}\, 53^\circ$.

485. Naudodamiesi lentele arba skaičiuokliu apskaičiuokite kampo didumą, jeigu jo tangentas lygus:

a) 0,268; b) 0,875; c) 11,25.

486*. Remdamiesi lygybe $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ įrodykite, kad, kampui didėjant, tangento reikšmės didėja.

487. Naudodamiesi lentele arba skaičiuokliu, apskaičiuokite:

a) $\mathrm{tg}\, 45^\circ 40'$; b) $\mathrm{tg}\, 63^\circ 15'$.

488. Suprastinkite:

a) $\frac{\sin^3\alpha}{\cos\alpha - \cos^3\alpha}$; b) $\frac{\mathrm{tg}\,\alpha}{1-\mathrm{tg}^2\,\alpha} \cdot \frac{\mathrm{ctg}^2\,\alpha - 1}{\mathrm{ctg}\,\alpha}$; c) $\frac{2\sin\alpha\cdot\cos\alpha - 3\cos\alpha}{1 - 3\sin\alpha + \sin^2\alpha - \cos^2\alpha}$.

489*. Stačiojo trikampio ABC ($\angle C = 90^\circ$) pusiaukraštinė $AD = 10$ cm, o pusiaukraštinė $BE = 4\sqrt{10}$ cm. Apskaičiuokite įžambinės AB ilgį.

490. Apskritimas, kurio ilgis yra 5 cm, ridenamas apie lygiakraštį trikampį, kurio kraštinė lygi 5 cm. Kiek kartų apsisuks apskritimas, kol grįš į pradinę padėtį?

491. Apie apskritimą apibrėžta lygiašonė trapecija, kurios perimetras lygus 80 cm, o smailusis kampas yra 30°. Raskite trapecijos plotą.

492*. Į lygiašonį trikampį ABC ($AB = BC$) įbrėžtas apskritimas. Įrodykite, kad jo centras yra aukštinėje BD. Kokiu santykiu centras dalija aukštinę BD, jeigu $AB = 7$ cm, $AC = 6$ cm?

493. Iš taško M, esančio šalia apskritimo, nubrėžtos dvi liestinės, liečiančios apskritimą taškuose A ir B. Per bet kurį apskritimo mažesniojo lanko AB tašką C nubrėžta liestinė, kertanti kitas liestines taškuose N ir P. Apskaičiuokite trikampio MNP perimetrą, jeigu $AM = 20$ cm.

494. Iš 3 karininkų ir 10 kareivių reikia sudaryti patrulį taip, kad patrulyje būtų vienas karininkas ir du kareiviai. Kiek yra skirtingų patrulio sudarymo būdų?

495. Lentelėje pateikti ligonio temperatūros (°C) nuo liepos 10 d. iki 20 d. duomenys:

Dienos	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Temperatūra	40,2	40,4	38,6	38	37,6	37,8	37,7	37,4	37,6	37,2	36,8

Pavaizduokite duomenis koordinačių plokštumoje taškais $(x; y)$, kur x — liepos mėnesio dienos, y — ligonio temperatūra (°C). Nustatykite, ar stebėti duomenys yra koreliuoti ir kaip.

496. Su kuriomis sveikosiomis kintamojo x reikšmėmis kvadratinio trinario:

a) $x^2 - 4x + 4$ skaitinės reikšmės yra mažesnės už kvadratinio trinario $18 - x - x^2$ skaitines reikšmes;

b) $30 - 5x - x^2$ skaitinės reikšmės yra didesnės už kvadratinio trinario $x^2 + x + 10$ skaitines reikšmes?

497. Raskite stačiojo trikampio statinių ilgius ir plotą, jei jo įžambinė lygi 50 cm, o perimetras yra:

a) 112 cm; b) 120 cm.

498. Pirmas bankas už indėlį priskaičiuoja 12% metinių sudėtinių palūkanų kas ketvirtį, o antras — 13% metinių sudėtinių palūkanų kas pusmetį. Kuriame banke naudingiau padėti 5000 Lt dvejiems metams?

499. Prekės didmeninė kaina 25 Lt, o mažmeninė:

a) 33 Lt; b) 34 Lt.

Parduotuvės išlaidas sudaro PVM, o taip pat kitos išlaidos, kurios lygios 25% prekės antkainio. Koks parduotuvės grynasis pelnas pardavus prekę, jeigu pelno mokesčio tarifas 24%?

500. Su kuriomis x reikšmėmis duotųjų trupmenų skaitinės reikšmės yra lygios:

a) $\frac{3x-7}{x+5}$ ir $\frac{x-3}{x+2}$; b) $\frac{5+2x}{4x-3}$ ir $\frac{3x+3}{7-x}$?

501. Dviženklio skaičiaus vienetų skaitmuo 2 mažesnis už dešimčių skaitmenį, o šio skaičiaus ir jo skaitmenų sumos sandauga lygi 252. Raskite šį skaičių.

502. Grafiškai išspręskite lygčių sistemą:

a) $\begin{cases} x - 2y = 3, \\ 2y = 5; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + 2y = 5, \\ x - y = 2. \end{cases}$

503. Su kuriomis x reikšmėmis duotosios trupmenos reikšmė lygi nuliui; su kuriomis — trupmena neturi prasmės:

a) $\frac{x-4}{3}$; b) $\frac{x-6}{x+1}$; c) $\frac{x-1}{x^2+4x-12}$; d) $\frac{x^2+4}{x^2-9}$?

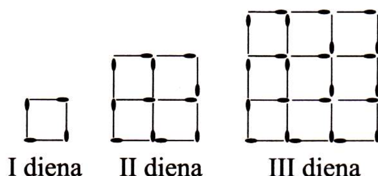
504. Šeimai pavyko sausio mėnesį susitaupyti 250 Lt, o kiekvieną kitą mėnesį vis 15 Lt daugiau.

a) Parašykite formulę sutaupytai pinigų sumai (litais) per bet kurį mėnesį apskaičiuoti.
b) Kiek susitaupė šeima gegužės mėnesį; lapkričio mėnesį?
c) Kurį mėnesį šeima susitaupė 295 Lt; 355 Lt?
d) Kiek pinigų susitaupė šeima per pusę metų; per metus?

505. Sandaugą parašę laipsniu apskaičiuokite:

a) $(-4)^5 \cdot 5^5 \cdot (-4)^{-4} \cdot 5^{-4}$; b) $6^6 \cdot (-3)^6 \cdot 6^{-3} \cdot (-3)^{-3}$.

506. Rokas iš degtukų kasdien dėlioja vis naujus kvadratėlius taip, kad buvusio kvadrato kraštinė pailginama degtuko ilgiu.

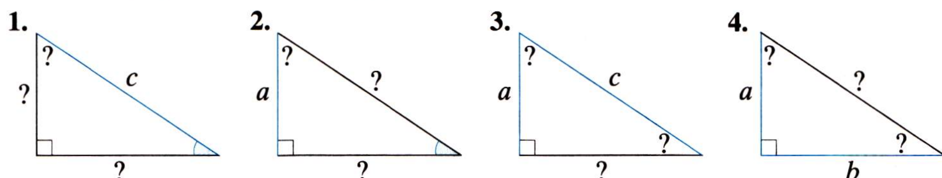


Kiek naujų degtukų reikės Rokui vienuoliktą dieną buvusiam kvadratui papildyti?

A 22 **B** 40 **C** 44 **D** 48 **E** 88

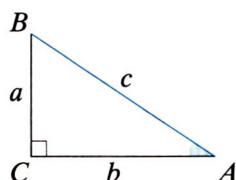
4 Stačiųjų trikampių sprendimas

Remiantis sinuso, kosinuso ir tangento apibrėžimais bei Pitagoro teorema galima rasti visus stačiojo trikampio elementus (kraštines ir kampus), kai žinomi du jo elementai, iš kurių bent vienas — kraštinės ilgis.
Visų stačiojo trikampio elementų radimas, kai duoti du jo elementai, vadinamas *stačiųjų trikampių sprendimu.*
Galimi 4 pagrindiniai stačiųjų trikampių sprendimo uždavinių tipai.



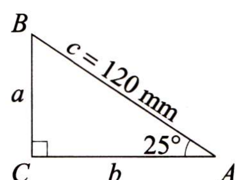
1. Žinoma įžambinė c ir smailusis kampas, pavyzdžiui, A.

Kadangi $\angle A + \angle B = 90°$, tai žinodami $\angle A$ randame $\angle B$, t. y. $\angle B = 90° - \angle A$. Statinius galima rasti remiantis formulėmis: $\sin A = \frac{a}{c}$, $\cos A = \frac{b}{c}$. Iš čia: $a = c \sin A$, $b = c \cos A$.



Pastaba. Radus statinį a, statinį b galima rasti ir remiantis Pitagoro teorema.

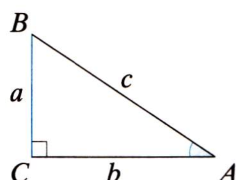
1 PAVYZDYS.
Duota: $c = 120\,\text{mm}$, $\angle A = 25°$. *Rasti*: a, b, $\angle B$.
Sprendimas. $\angle B = 90° - 25° = 65°$.
Iš formulės $\sin A = \frac{a}{c}$ randame:
$a = c \sin A = 120 \cdot \sin 25° \approx 120 \cdot 0{,}423 \approx 51$ (mm).
Iš formulės $\cos A = \frac{b}{c}$ randame:
$b = c \cos A = 120 \cdot \cos 25° \approx 120 \cdot 0{,}906 \approx 109$ (mm).
Statinį b galima apskaičiuoti ir pagal Pitagoro teoremą:
$b \approx \sqrt{120^2 - 51^2} \approx 109$ (mm).



Atsakymas. $a \approx 51\,\text{mm}$, $b \approx 109\,\text{mm}$, $\angle B = 65°$.

2. Žinomas statinis a ir smailusis kampas A.

$\angle B = 90° - \angle A$. Statinį b ir įžambinę c galima rasti remiantis formulėmis: $\operatorname{tg} A = \frac{a}{b}$, $\sin A = \frac{a}{c}$. Iš čia: $b = \frac{a}{\operatorname{tg} A}$, $c = \frac{a}{\sin A}$.



2 PAVYZDYS.

Duota: $a = 70\,\text{mm}$, $\angle A = 48°$. *Rasti*: b, c, $\angle B$.

Sprendimas. $\angle B = 90° - \angle A = 90° - 48° = 42°$.

Įžambinę c skaičiuosime pagal formulę $\sin A = \frac{a}{c}$:

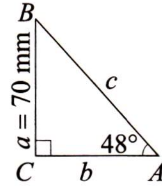
$c = \frac{a}{\sin A} = \frac{70}{\sin 48°} \approx \frac{70}{0{,}743} \approx 94\,(\text{mm})$.

Statinį b galima apskaičiuoti pagal Pitagoro teoremą:

$b \approx \sqrt{94^2 - 70^2} \approx 63\,(\text{mm})$, arba pagal formulę

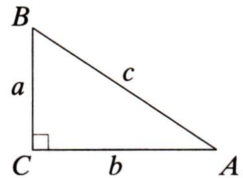
$\text{tg}\, A = \frac{a}{b}$: $b = \frac{a}{\text{tg}\, A} = \frac{70}{\text{tg}\, 48°} \approx \frac{70}{1{,}111} \approx 63\,(\text{mm})$.

Atsakymas. $b \approx 63\,\text{mm}$, $c \approx 94\,\text{mm}$, $\angle B = 42°$.



3. Žinomas statinis a ir įžambinė c.

Iš formulės $\sin A = \frac{a}{c}$ pagal lentelę, esančią vadovėlio gale, arba skaičiuokliu randame kampą A. Po to apskaičiuojame kampą B: $\angle B = 90° - \angle A$. Statinį b galima rasti iš formulės $\cos A = \frac{b}{c}$; $b = c \cos A$, arba remiantis Pitagoro teorema.



3 PAVYZDYS.

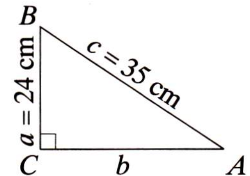
Duota: $a = 24\,\text{cm}$, $c = 35\,\text{cm}$. *Rasti*: $\angle A$, $\angle B$, b.

Sprendimas. $\sin A = \frac{24}{35} \approx 0{,}686$. Iš lentelės sinusų stulpelyje randame skaičiui 0,686 artimiausią skaičių 0,682. Jis yra 43° eilutėje. Taigi $\angle A \approx 43°$.

Tada $\angle B \approx 90° - 43° = 47°$. Statinį b apskaičiuojame remdamiesi Pitagoro teorema:

$b = \sqrt{35^2 - 24^2} \approx 25{,}5\,(\text{cm})$.

Atsakymas. $\angle A \approx 43°$, $\angle B \approx 47°$, $b \approx 25{,}5\,\text{cm}$.



4. Žinomi statiniai a ir b.

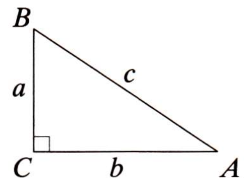
Apskaičiuojame $\text{tg}\, A = \frac{a}{b}$.

Lentelėje randame kampo A didumą.

Apskaičiuojame kampą B:

$\angle B = 90° - \angle A$.

Įžambinę galima apskaičiuoti remiantis Pitagoro teorema: $c = \sqrt{a^2 + b^2}$.



4 PAVYZDYS.

Duota: $a = 82\,\text{mm}$, $b = 40\,\text{mm}$. *Rasti*: $\angle A$, $\angle B$, c.

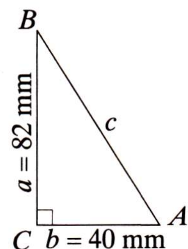
Sprendimas. $\text{tg}\, A = \frac{82}{40} = 2{,}05$.

Lentelėje randame, kad $\angle A \approx 64°$.

$\angle B \approx 90° - 64° = 26°$.

$c = \sqrt{82^2 + 40^2} \approx 91\,(\text{mm})$.

Atsakymas. $\angle A \approx 64°$, $\angle B \approx 26°$, $c \approx 91\,\text{mm}$.

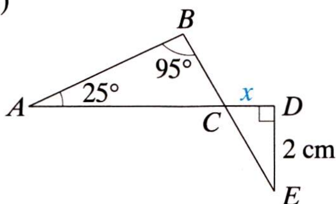


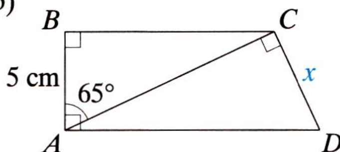
Pratimai ir uždaviniai

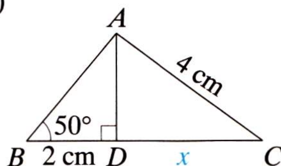
507. Išspręskite stačiuosius trikampius:

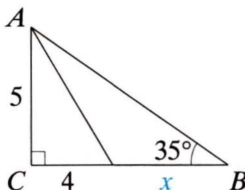
a) $\angle A = 18^\circ$, $AC = 10$ b) $\angle A = 18^\circ$, $BC = 10$
c) $\angle A = 62^\circ$, $AB = 12$ d) $\angle B = 25^\circ$, $AC = 4{,}5$
e) $\angle B = 56^\circ$, $BC = 6$ f) $\angle B = 80^\circ$, $AB = 14$
g) $a = 25$, $c = 42$ h) $a = 12$, $b = 32$

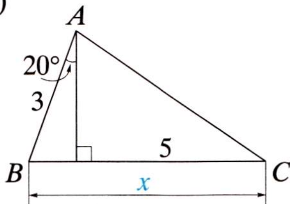
508. Apskaičiuokite x:

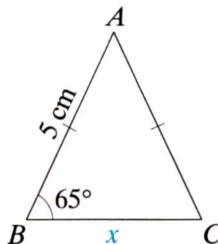
a)


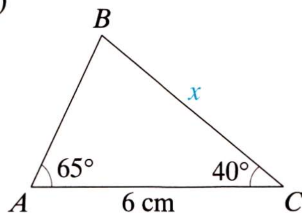
b)


c)


d)


e)


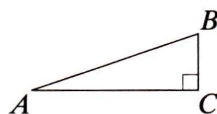
f)


g)


509. Keturkampis $ABCD$ — rombas, kurio $AC = 10\,\text{cm}$, $BD = 14\,\text{cm}$. Apskaičiuokite rombo kampus ir perimetrą.

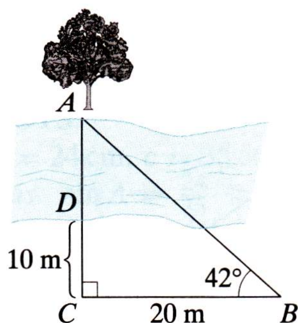
510. Trapecijos mažesnysis pagrindas lygus 2 dm, o aukštinė — 1,2 dm. Apskaičiuokite trapecijos plotą, jeigu jos šoninės kraštinės pasvirusios į pagrindą 50° ir 35° kampais.

511. Kelio atkarpos AB nuolydis yra išreiškiamas procentais. Pirmiausia yra apskaičiuojamas santykis $\frac{BC}{AB}$, t. y. $\sin A$, ir jis išreiškiamas procentais. Pavyzdžiui, jei keliu nuvažiavus 1 km, pakylama į 125 m aukštį, tai kelio nuolydis yra $\sin A = \frac{125}{1000} = 0,125$ arba 12,5%.

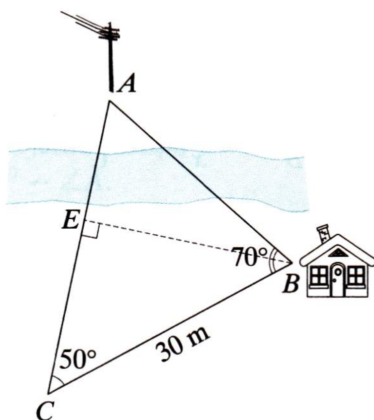


Apskaičiuokite geležinkelio nuolydį ir nuolydžio kampą, jeigu traukinys, nuvažiavęs 1500 m, pakilo į 20 m aukštį.

512. a) Apskaičiuokite upės plotį AD remdamiesi brėžiniu:



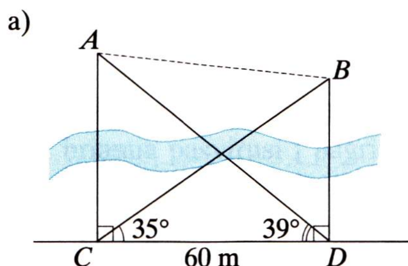
b) Pagal brėžinio duomenis apskaičiuokite, kiek metrų elektros laido reikės nutiesti nuo elektros stulpo (A) iki namo (B).



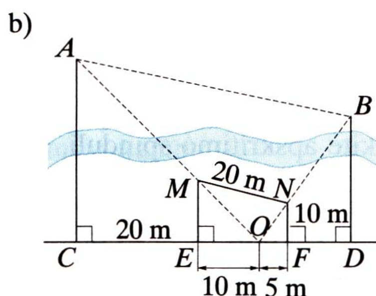
Nurodymas. Iš viršūnės B nubrėžkite aukštinę BE į kraštinę AC.

513. Remdamiesi brėžiniais apskaičiuokite atstumą tarp A ir B.

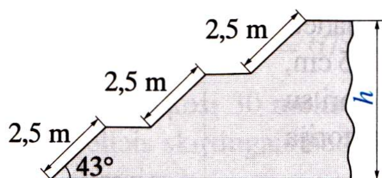
a)



b)



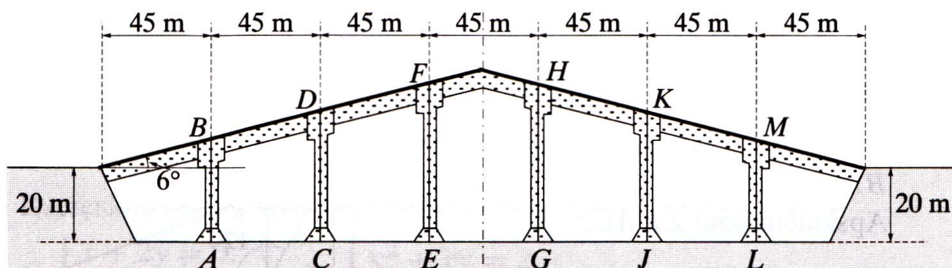
514. Terasos matmenys nurodyti brėžinyje. Apskaičiuokite terasos aukštį h.



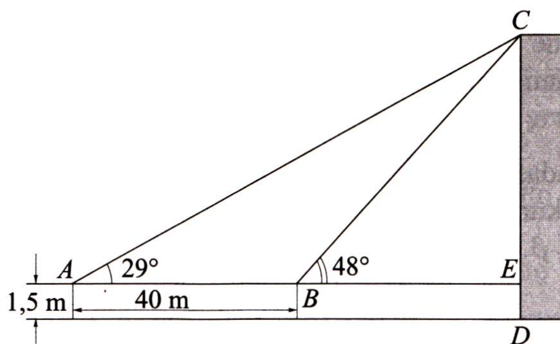
515. Tilto per upę, kurios dugnas plokščias, matmenys parodyti brėžinyje.

1) Apskaičiuokite kiekvienos atramos aukštį (1 cm tikslumu): AB, CD, EF, GH, JK ir LM.

2) Raskite aukščiausio tilto taško nuotolį iki upės dugno.



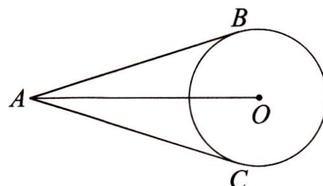
516. Pagal brėžinio duomenis apskaičiuokite bokšto aukštį (CD).



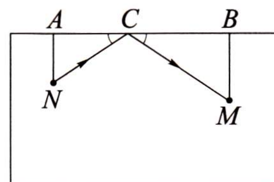
Nurodymas. 1) Pažymėkite $CE = x$.
2) Išreikškite BE ir AE x-o funkcija.
3) Apskaičiavę x raskite bokšto aukštį.

517. Įbrėžtinis kampas α ($\alpha < 90°$) remiasi į apskritimo stygą, kurios ilgis a. Raskite apskritimo spindulį.

518. AB, AC — apskritimo liestinės, $AO = 12{,}5$ cm, $R = 4$ cm. Apskaičiuokite $\angle BAC$.

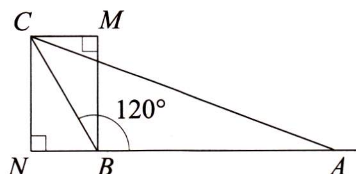


519. Ant stačiakampio formos biliardo stalo padėti du rutuliai N ir M taip, kad $NA = 25$ cm, $MB = 35$ cm, o $AB = 90$ cm. Žaidėjas nori su rutuliu N pataikyti į M mušdamas trajektorija NCM ($\angle NCA = \angle MCB$). Apskaičiuokite kampo NCA didumą.



520. Keturkampis $ABCD$ — stačiakampis, kurio $AB = 7{,}2$ cm, $BC = 5{,}4$ cm.
1) Nubraižykite šį stačiakampį ir jo įstrižainę AC.
2) Apskaičiuokite kampą ACD.
3) Iš įstrižainės vidurio iškelkite statmenį ir jo susikirtimo su kraštine BC tašką pažymėkite raide E.
4) Įrodykite, kad $\triangle AEC$ yra lygiašonis.
5) Apskaičiuokite $\angle AEC$.

521. $NCMB$ — stačiakampis, kurio $BM = 4$ cm; $AB = 9$ cm. Apskaičiuokite $\angle BAC$.



522. Stačiakampio gretasienio pagrindas yra kvadratas.
1) Raskite gretasienio tūrį ir šoninio paviršiaus plotą, jeigu gretasienio aukštinė H, o įstrižainė pasvirusi į pagrindo plokštumą kampu α.
2) Apskaičiuokite gretasienio tūrį ir šoninio paviršiaus plotą, kai $\alpha = 68°$, $H = 21{,}5$ dm.

523. Stačiosios prizmės pagrindas statusis trikampis, kurio smailusis kampas α, o įžambinė c. Sienos, kuri yra prieš kampą α, įstrižainė su pagrindo plokštuma sudaro kampą β.
1) Raskite prizmės tūrį.
2) Apskaičiuokite prizmės tūrį, kai $c = 20$ cm, $\alpha = 39°$, $\beta = 64°$.

524. a) Taisyklingosios keturkampės piramidės pagrindo kraštinė a, o šoninė briauna pasvirusi į pagrindo plokštumą kampu α.
1) Raskite piramidės tūrį.
2) Apskaičiuokite piramidės tūrį, kai $a = 4$ dm, $\alpha = 56°$.

b) Taisyklingosios trikampės piramidės pagrindo kraštinė a, o šoninė briauna pasvirusi į pagrindo plokštumą kampu α.
1) Raskite piramidės tūrį.
2) Apskaičiuokite piramidės tūrį, kai $a = 8{,}5$ dm, $\alpha = 65°$.

525. Taisyklingosios keturkampės piramidės šoninės sienos aukštinė (apotema) lygi b. Ji pasvirusi į pagrindo plokštumą kampu α.
1) Raskite piramidės tūrį ir šoninio paviršiaus plotą.
2) Apskaičiuokite piramidės tūrį ir šoninio paviršiaus plotą, kai $b = 24{,}6$ dm, $\alpha = 67°$.

526. Klasėje mokosi 30 mokinių.
a) Keliais skirtingais būdais gali būti išrinktas klasės seniūnas ir jo pavaduotojas?
b) Keliais būdais galima deleguoti tris klasės atstovus į mokyklos mokinių konferenciją?

527. Per tam tikrą skaičių taškų, esančių vienoje plokštumoje ir išdėstytų taip, kad nėra trijų taškų vienoje tiesėje, nubrėžtos visos tiesės, jungiančios tuos taškus poromis. Kiek buvo taškų, jeigu nubrėžta:

a) 10 tiesių; b) 21 tiesė; c) 28 tiesės; d) 55 tiesės?

528. Raskite sveikuosius duotos nelygybės sprendinius:

a) $x(x+5) \geqslant 2(x^2+2)$; b) $11-(x+1)^2 \geqslant x$.

529. Išspręskite lygčių sistemą:

a) $\begin{cases} x+2y=0, \\ x^2+y^2=6x; \end{cases}$ b) $\begin{cases} y^2+xy=2, \\ x-3y=7. \end{cases}$

530. Raskite duotų tiesių susikirtimo taško koordinates:

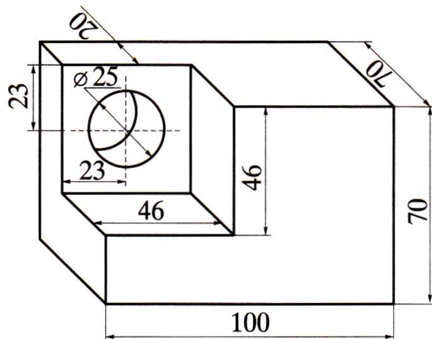
a) $2x-y+4=0$ ir $x-y-1=0$; b) $3x-2y-7=0$ ir $x+y+1=0$.

531. Formule $y=\sqrt{x}$ išreikšta kvadrato kraštinės priklausomybė nuo jo ploto.
a) Nubraižykite funkcijos $f(x)=\sqrt{x}$ grafiką.
b) Kokią prasmę turi reiškinys $4\sqrt{x}$?
c) Su kuria teigiama x reikšme kvadrato ploto ir šio kvadrato perimetro skaitinės reikšmės yra lygios?
d) Su kuria teigiama x reikšme kvadrato ploto ir šio kvadrato įstrižainės skaitinės reikšmės yra lygios?

532. Raskite aritmetinės progresijos pirmąjį narį, skirtumą ir dvidešimtąjį narį, jei jos antrasis narys lygus -4, o:
a) penktasis narys yra 5; b) ketvirtasis narys yra -16.

533. Akcija, kurios nominalioji vertė 25 Lt, šiandien biržoje parduodama už:
a) 23 Lt; b) 23,5 Lt; c) 26,5 Lt; d) 28,5 Lt.
Koks akcijos kursas, išreikštas procentais nominaliosios vertės atžvilgiu?

534. Pagal brėžinio matmenis raskite detalės:
a) tūrį; *b) viso paviršiaus plotą.



535. Garlaivis 210 km atstumą pasroviui nuplaukia 4 valandomis greičiau negu prieš srovę. Raskite garlaivio savąjį greitį, jeigu upės tėkmės greitis lygus 3 km/h.

536. Suprastinę reiškinius $25 : 5^3$ ir $\frac{1}{64} \cdot (2^{-4})^{-1}$ apskaičiuokite jų:

a) sumą; b) skirtumą; c) sandaugą;
d) dalmenį; e) skirtumo kvadratą; f) kvadratų skirtumą;
g) sumos ir skirtumo dalmenį.

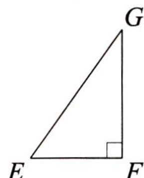
537. Cechas per mėnesį gali pagaminti 200 stalų. Stalų gamybos pastoviosios išlaidos kas mėnesį sudaro 12 000 Lt, o kintamosios išlaidos vienam stalui pagaminti yra 300 Lt. Po kiek litų reikia parduoti stalą, kad atsipirktų visos cecho išlaidos realizavus:
a) 160 stalų; b) 150 stalų; c) 120 stalų; d) 100 stalų.

538. Laikrodis su rodyklėmis rodo 19 val. 15 min. Kokį kampą sudaro valandinė ir minutinė rodyklės?

539. Egzaminą išlaikė daugiau kaip 93% mokyklos dešimtokų. Kiek mažiausiai galėjo būti egzaminą laikiusių dešimtokų?

Pasitikrinkite

1. Pasakykite, kas turėtų būti parašyta vietoj daugtaškių.



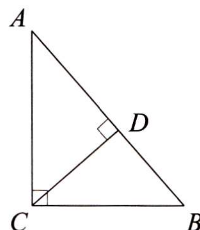
$\sin E = \frac{\cdots}{\cdots}$ $\sin G = \frac{\cdots}{\cdots}$

2. Nubraižykite smailųjį kampą A, kurio sinusas lygus:
a) $\frac{2}{5}$; b) 0,8.
1) Matlankiu išmatuokite jo didumą.
2) Apskaičiuokite kampo didumą 1° tikslumu naudodamiesi lentele.

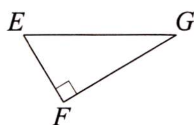
3. Išdėstykite didėjančia tvarka:
$\sin 35^\circ$, $\sin \frac{\pi}{6}$, $\sin \frac{\pi}{4}$, $\sin 70^\circ$, $\sin \frac{\pi}{3}$, $\sin 89^\circ$.

4. Kas daugiau:
a) $\sin 63^\circ$ ar $\frac{\sqrt{3}}{2}$; b) $\sin 29^\circ$ ar $\frac{3}{5}$?

5. Duota: $CB = 3{,}6$, $AB = 6$.
1) Apskaičiuokite:
a) $\angle BAC$;
b) AC;
c) S_{ABC}.
2) Iš kampo C nubrėžta aukštinė CD. Apskaičiuokite CD ilgį.



6. Pasakykite, kas turėtų būti parašyta vietoj daugtaškių.



$\cos E = \frac{\cdots}{\cdots}$ $\cos G = \frac{\cdots}{\cdots}$

$\operatorname{tg} E = \frac{\cdots}{\cdots}$ $\operatorname{tg} G = \frac{\cdots}{\cdots}$

7. Nubraižykite kampą, kurio kosinusas lygus:
a) 0,6; b) $\frac{4}{5}$.
1) Matlankiu išmatuokite kampo didumą.
2) Apskaičiuokite kampo didumą 1° tikslumu pagal lentelę.

8. Išdėstykite didėjančia tvarka:
$\cos 29^\circ$, $\cos \frac{\pi}{6}$, $\cos \frac{\pi}{4}$, $\cos 62^\circ$, $\cos \frac{\pi}{3}$, $\cos 80^\circ$.

9. Kas daugiau:

a) $\cos 29^\circ$ ar $\frac{\sqrt{3}}{2}$; b) $\cos 63^\circ$ ar $\frac{3}{5}$?

10. Apskaičiuokite naudodamiesi lentele ar skaičiuokliu:

a) $\sin 49^\circ$ b) $\cos 76^\circ$ c) $\operatorname{tg} 34^\circ$

d) $\sin 59^\circ 8'$ e) $\cos 31^\circ 48'$ f) $\operatorname{tg} 59^\circ 42'$

11. Suprastinkite:

a) $\sin^3\alpha + \cos^2\alpha \cdot \sin\alpha$;

b) $\cos^3\alpha + \sin^2\alpha \cdot \cos\alpha$;

c) $\cos^3\alpha - \sin\alpha \cdot \cos^2\alpha + \cos\alpha \sin^2\alpha - \sin^3\alpha$;

d) $(\cos\alpha + \sin\alpha)^2 + (\cos\alpha - \sin\alpha)^2$.

12. Trikampis ABC — statusis ($\angle C = 90^\circ$). Raskite AB, jei:

a) $\sin A = \frac{4}{5}$, $AC = 36$ cm;

b) $\cos A = \frac{2}{3}$, $CB = 20$ cm.

13. Nubraižykite kampą, kurio tangentas lygus:

a) 0,63; b) $\frac{4}{7}$.

1) Matlankiu išmatuokite kampą.

2) Apskaičiuokite kampą naudodamiesi lentele (1° tikslumu).

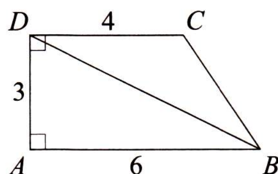
14. a) $\sin\alpha = 0{,}8$. Apskaičiuokite $\cos\alpha$ ir $\operatorname{tg}\alpha$.

b) $\cos\alpha = \frac{4}{5}$. Apskaičiuokite $\sin\alpha$ ir $\operatorname{tg}\alpha$.

c) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{5}{12}$. Apskaičiuokite $\sin\alpha$ ir $\cos\alpha$.

15. 1) Apskaičiuokite kampą ABD

2) Apskaičiuokite kampą CBD.

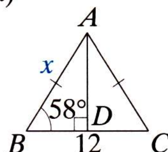


16. Suprastinkite:

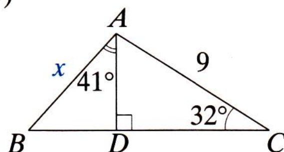
a) $(1 + \sin\alpha)(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha)(1 - \sin\alpha)$; b) $\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}$; c) $\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha}$.

17. Apskaičiuokite x:

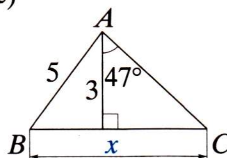
a)



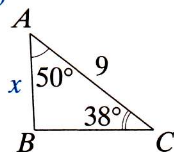
b)



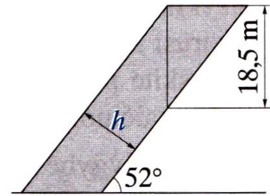
c)



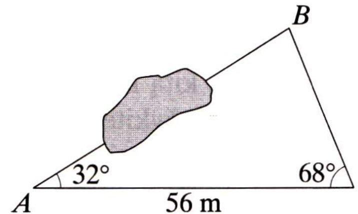
d)



18. Akmens anglies sluoksnis pasviręs į horizontą 52° kampu. Sluoksnį gręžiant vertikaliai, reikėjo pragręžti 18,5 m. Koks akmens anglies sluoksnio storis h?



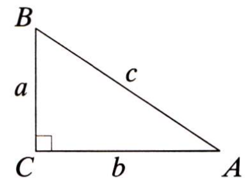
19. Pagal brėžinyje pateiktus matmenis apskaičiuokite atstumą AB.



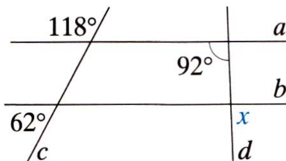
20. Apskritime nubrėžta l ilgio styga nuo apskritimo centro nutolusi atstumu d. Kokiu kampu ši styga matoma iš apskritimo centro? Apskaičiuokite kampą, kai $l = 30$ cm, $d = 8$ cm.

21. Išspręskite stačiuosius trikampius:

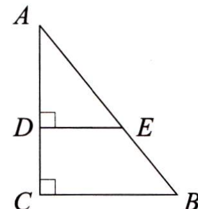
a) $a = 12$, $\angle B = 35^\circ$ b) $b = 8$, $\angle B = 75^\circ$
c) $a = 4$, $c = 7$ d) $c = 15$, $\angle A = 42^\circ$
e) $a = 6$, $b = 9$ f) $a = 1$, $c = 2$



22. Apskaičiuokite kampo x didumą:



23. Trikampyje ABC ($\angle C = 90^\circ$): $DE = 3{,}6$ cm, $AD = 4{,}8$ cm, $DC = 3{,}2$ cm. Apskaičiuokite:
1) AB;
2) S_{ABC};
3) $\angle AED$ (1° tikslumu).



24. Apie apskritimą apibrėžtas keturkampis, kurio trijų paeiliui einančių kraštinių ilgiai 9, 12, 6. Apskaičiuokite keturkampio perimetrą.

25. Taisyklingos keturkampės piramidės briauna, lygi b, į pagrindo plokštumą pasvirusi kampu α.

1) Raskite piramidės tūrį.

2) Apskaičiuokite piramidės tūrį, kai $b = 16\,\text{cm}$, $\alpha = 64^\circ$.

26. Raskite nelygybės sveikuosius sprendinius:

a) $x^2 + 4x + 4 < 4$; b) $x^2 + 4x + 4 < 9$.

27. Petraičių šeima sausio mėnesį sutaupė 5 kWh elektros energijos, o kiekvieną kitą mėnesį — vis 3 kWh daugiau.

a) Parašykite formulę sutaupytai elektros energijai (kWh) per mėnesį apskaičiuoti.

b) Kiek elektros energijos sutaupė šeima liepos mėnesį; spalio mėnesį?

c) Kurį mėnesį šeima sutaupė 17 kWh; 38 kWh?

d) Kiek iš viso elektros energijos sutaupė Petraičių šeima per pusę metų; per metus?

28. Raskite taškų, kuriuose kertasi funkcijų $f(x) = x^2 - x$ ir $g(x) = x + 8$ grafikai:

a) abscises; b) ordinates.

29. Raskite tiesės $4x - 3y - 6 = 0$ ir koordinačių ašių susikirtimo taškų koordinates. Nubraižykite šią tiesę.

30. Su kuriomis x reikšmėmis duotos trupmenos reikšmė lygi nuliui; su kuriomis — trupmena neturi prasmės:

a) $\frac{x^2-3x}{x^2-9}$; b) $\frac{25-x^2}{5x-x^2}$?

31. Atlikite veiksmus:

a) $(4{,}2 \cdot 10^{-4}) \cdot (5{,}0 \cdot 10^{-2})$; b) $\frac{2{,}4 \cdot 10^3}{4{,}8 \cdot 10^5}$.

Rezultatą parašykite standartine išraiška.

32. Agrofirma planavo apsėti rugiais 180 ha. Kasdien apsėdama 3 ha daugiau, negu buvo planuota, agrofirma baigė sėją 2 dienomis anksčiau.

a) Kiek hektarų planavo kasdien apsėti agrofirma?

b) Per kiek dienų planavo agrofirma baigti sėją?

7 TRIKAMPIŲ SPRENDIMAS

1. Kampų nuo 0° iki 180° trigonometrinės funkcijos 168

2. Sinusų ir kosinusų teoremos 174

3. Bet kokių trikampių sprendimas 182

4. Taisyklingųjų daugiakampių perimetrai ir plotai. Apskritimo ilgis ir skritulio plotas 189

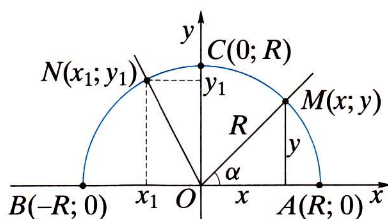
Pasitikrinkite 195



1 Kampų nuo 0° iki 180° trigonometrinės funkcijos

Spręsdami uždavinius apie stačiuosius trikampius rėmėmės smailiojo kampo trigonometrinėmis funkcijomis. Trigonometrinių funkcijų apibrėžimą praplėsime ir bukiesiems kampams, kad galėtume spręsti uždavinius apie bet kokius trikampius.

Koordinačių plokštumoje nubrėžkime pusapskritimį, kurio centras sutampa su koordinačių pradžia, o spindulys lygus R. Nagrinėsime kampus, kurių viena kraštinė sutampa su teigiamąja Ox pusaše, o kita kraštinė kerta tą pusapskritimį.



Kai kampas yra smailusis, pusapskritimio ir kampo kraštinės susikirtimo taškas yra pirmajame ketvirtyje, o kai bukas — antrajame ketvirtyje.

Taigi kiekvieną kampą atitinka vienas pusapskritimio taškas. Sakykime, kampą α atitinka taškas M, kurio koordinatės yra x ir y. Kai kampas α yra smailusis, tai

$$\sin\alpha = \frac{y}{R},\ \cos\alpha = \frac{x}{R},\ \operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x};\quad \text{čia } x \text{ ir } y \text{ — taško } M \text{ koordinatės.}$$

Akivaizdu, kad šie santykiai nepriklauso nuo spindulio R, o tik nuo kampo α didumo.

Panašiai apibrėšime $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ ir bukiesiems kampams. Pavyzdžiui, kai $\beta = \angle AON$, tai

$$\sin\beta = \frac{y_1}{R},\ \cos\beta = \frac{x_1}{R},\ \operatorname{tg}\beta = \frac{y_1}{x_1};\quad \text{čia } x_1 \text{ ir } y_1 \text{ — taško } N \text{ koordinatės.}$$

Kai spindulys OM sutampa su Ox teigiamąja pusaše, tai kampas tarp jų lygus 0°. Tuomet taškas M sutampa su tašku $A(R;\,0)$ ir

$$\sin 0^\circ = \frac{0}{R} = 0,\ \cos 0^\circ = \frac{R}{R} = 1,\ \operatorname{tg} 0^\circ = \frac{0}{R} = 0.$$

Kai $\alpha = 90^\circ$, taškas M sutampa su tašku $C(0;\,R)$ ir

$$\sin 90^\circ = \frac{R}{R} = 1,\ \cos 90^\circ = \frac{0}{R} = 0,$$

o tangentas yra neapibrėžtas, nes $x = 0$, $y = R$.

Kai $\alpha = 180^\circ$, taškas M sutampa su tašku $B(-R;\,0)$ ir

$$\sin 180^\circ = \frac{0}{R} = 0,\ \cos 180^\circ = \frac{-R}{R} = -1,\ \operatorname{tg} 180^\circ = \frac{0}{-R} = 0.$$

Kadangi pusapskritimio bet kurio taško koordinatės tenkina lygtį $x^2+y^2=R^2$, $y \geqslant 0$, tai $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=\frac{y^2}{R^2}+\frac{x^2}{R^2}=1$. Taigi lygybė $\boxed{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1}$ teisinga su bet kuriais $0° \leqslant \alpha \leqslant 180°$.
Kadangi $0 \leqslant y \leqslant R$, $-R \leqslant x \leqslant R$, tai $0 \leqslant \sin\alpha \leqslant 1$, $-1 \leqslant \cos\alpha \leqslant 1$, kai $0 \leqslant \alpha \leqslant 180°$.

6 skyriuje, spręsdami 449 ir 481 uždavinius įsitikinome, kad smailiesiems kampams teisingos formulės:

$$\boxed{\sin(90°-\alpha)=\cos\alpha, \quad \cos(90°-\alpha)=\sin\alpha, \quad \operatorname{tg}(90°-\alpha)=\operatorname{ctg}\alpha}$$

Kampai α ir $90°-\alpha$ vadinami papildomaisiais kampais.
Suraskime ryšį tarp gretutinių kampų trigonometrinių funkcijų.

Teorema. *Jeigu* $0° < \alpha < 180°$, *tai*

$$\boxed{\sin(180°-\alpha)=\sin\alpha, \quad \cos(180°-\alpha)=-\cos\alpha}$$

Jei, be to, $\alpha \neq 90°$, *tai*

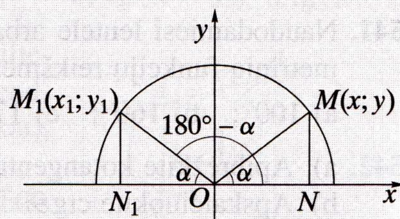
$$\boxed{\operatorname{tg}(180°-\alpha)=-\operatorname{tg}\alpha}$$

Šios formulės ir puslapio viršuje įrėmintos formulės vadinamos *redukcijos formulėmis*.

Užduotis. Apskaičiuokite 120°, 135° ir 150° kampų sinuso, kosinuso ir tangento reikšmes.

Redukcijos formulių įrodymas

Nagrinėsime 3 atvejus: 1) $\alpha < 90°$; 2) $\alpha = 90°$; 3) $\alpha > 90°$.
1) Brėžinyje pavaizduoti kampai $\angle NOM=\alpha$ ir $\angle NOM_1=180°-\alpha$, $\angle M_1ON_1=\alpha$. $\triangle NOM=\triangle N_1OM_1$, nes jie turi lygias įžambines ir lygius kampus prie jos. Iš šių trikampių lygumo išplaukia, kad $MN=M_1N_1$, $ON=ON_1$, t. y. $y=y_1$, $x=-x_1$. Todėl



$$\sin(180°-\alpha)=\frac{y_1}{R}=\frac{y}{R}=\sin\alpha,$$
$$\cos(180°-\alpha)=\frac{x_1}{R}=\frac{-x}{R}=-\cos\alpha.$$

Iš šių lygybių gauname:

$$\operatorname{tg}(180°-\alpha)=\frac{\sin(180°-\alpha)}{\cos(180°-\alpha)}=\frac{\sin\alpha}{-\cos\alpha}=-\operatorname{tg}\alpha.$$

2) Kai $\alpha = 90^\circ$, patikriname, kad sinusui ir kosinusui gautos formulės yra teisingos. (90° kampo tangentas neegzistuoja!)

3) Kai $\alpha > 90^\circ$, tai $\beta = 180^\circ - \alpha < 90^\circ$. Kampui β pritaikome sinuso redukcijos formulę: $\sin(180^\circ - \beta) = \sin\beta$, t. y.

$$\sin\bigl(180^\circ - (180^\circ - \alpha)\bigr) = \sin(180^\circ - \alpha) \quad \text{arba} \quad \sin\alpha = \sin(180^\circ - \alpha).$$

Taigi matome, kad formulė $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin\alpha$ teisinga ir tuo atveju, kai kampas α yra bukas. Analogiškai galima įsitikinti, kad formulės $\cos(180^\circ - -\alpha) = -\cos\alpha$, $\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$ teisingos, kai kampas α yra bukas.

Lentelėje surašytos 0°, 30°, 45°, 60°, 90°, 120°, 135°, 150° ir 180° kampų sinuso, kosinuso ir tangento reikšmės.

	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
tg	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	—	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

Pratimai ir uždaviniai

540. Apskaičiuokite:

a) $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, jei $\sin\alpha = \frac{3}{5}$, $90^\circ < \alpha < 180^\circ$;

b) $\sin\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, jei $\cos\alpha = -\frac{3}{5}$;

c) $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, jei $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{3}{4}$.

541. Naudodamiesi lentele arba skaičiuokliu raskite nurodytų kampų trigonometrinių funkcijų reikšmes:

a) 100°; b) 160°; c) 175°.

542. a) Apibrėžkite kotangentą bukajam kampui.

b) Apskaičiuokite $\operatorname{ctg} 90^\circ$. Kodėl neegzistuoja kotangentas 0°, 180°?

c) Įrodykite, kad $\operatorname{ctg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha$.

543. Naudodamiesi lentele arba skaičiuokliu raskite kampą α:

a) $\cos\alpha = -0{,}707$; b) $\operatorname{tg}\alpha = -0{,}7$; c) $\operatorname{ctg}\alpha = -4$.

544. Apskaičiuokite:

a) $\cos 45^\circ + \sin 45^\circ - \cos 120^\circ - 2\sin 135^\circ$;

b) $\sin 120^\circ \cdot \operatorname{tg} 60^\circ - \cos 150^\circ \cdot \operatorname{tg} 30^\circ - 2\sin 150^\circ \cdot \cos 120^\circ$;

c) $\sin \frac{\pi}{6} + \cos \frac{\pi}{6} - \operatorname{tg} \frac{2\pi}{3} + \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \frac{3\pi}{4}$;

d) $\sin \frac{3\pi}{4} - \cos \frac{3\pi}{4} - \cos \frac{2\pi}{3} - 2\sin \frac{\pi}{4}$.

545. Nubraižykite kampą α, kurio:

a) $\sin \alpha = \frac{2}{3}$; b) $\cos \alpha = -0{,}6$; c) $\operatorname{tg} \alpha = -2$; d) $\operatorname{ctg} \alpha = -0{,}5$.

546. Nustatykite sandaugos ženklą:

a) $\sin 118^\circ \cdot \cos 100^\circ$

b) $\operatorname{tg} 92^\circ \cdot \cos 102^\circ$

c) $\cos 118^\circ \cdot \sin 118^\circ \cdot \operatorname{tg} 118^\circ$

d) $\sin 151^\circ \cdot \operatorname{ctg} 95^\circ$

547. Suprastinkite:

a) $\sin(90^\circ - \alpha) - \cos(180^\circ - \alpha) + \operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) + \operatorname{ctg}(90^\circ - \alpha)$;

b) $\sin(\pi - \alpha) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \operatorname{ctg}(\pi - \alpha)$.

548. Apskaičiuokite $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$, jei $\operatorname{ctg} \alpha = -2$.

549. Apskaičiuokite:

a) $\frac{1+\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}\alpha}$, jei $\sin \alpha = \frac{7}{25}$, $90^\circ < \alpha < 180^\circ$;

b) $\frac{\sin\alpha+2\cos\alpha}{\cos\alpha-3\sin\alpha}$, jei $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2}$;

c) $\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha}$, jei $\cos \alpha = -0{,}4$.

550. Apskaičiuokite:

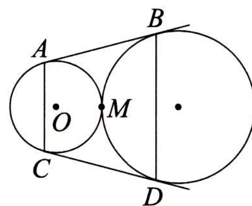
a) $\cos \frac{\pi}{10} + \cos \frac{4\pi}{10} + \cos \frac{6\pi}{10} + \cos \frac{9\pi}{10}$;

b) $\cos^2 \frac{\pi}{10} + \cos^2 \frac{4\pi}{10} + \cos^2 \frac{6\pi}{10} + \cos^2 \frac{9\pi}{10}$.

551. Suprastinkite:

a) $\cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha \operatorname{tg}^2 \alpha$; b) $\frac{\sin^2\alpha-\sin^4\alpha}{\cos^2\alpha-\cos^4\alpha}$; c) $\operatorname{tg}^2 \alpha - \sin^2 \alpha \operatorname{tg}^2 \alpha$.

552*. Brėžinyje pavaizduoti du taške M besiliečiantys apskritimai. AB ir CD — jų bendros liestinės (A, B, C, D — lietimosi taškai), $AC = a$, $BD = b$.
Raskite trapecijos $BDCA$ šoninės kraštinės ilgį.



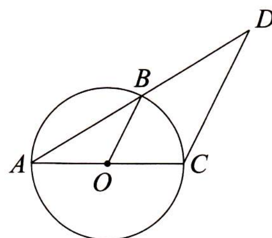
Nurodymas. Per lietimosi tašką M nubrėžkite abiem apskritimams bendrą liestinę ir įsitikinkite, kad jos atkarpa tarp liestinių AB ir CD yra trapecijos vidurinė linija.

553. Du apskritimai, kurių centrai O_1 ir O_2, liečiasi iš išorės taške A. Per tašką A nubrėžta tiesė kerta abu apskritimus taškuose B ir C. Raskite $R_1 : R_2$, jeigu $2AB = AC$ (čia R_1 ir R_2 — apskritimų spinduliai).

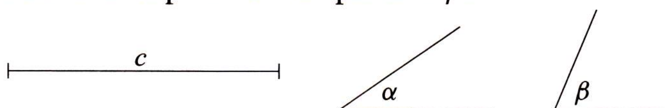
554. Trikampis ABC — lygiakraštis. Apskritimas, kurio skersmuo AC, o centras O, kerta kraštinę BC taške D. Spindulyje OC atidėkite atkarpą $CE = OC$. Įrodykite, kad:

1) taškas D yra kraštinės BC vidurio taškas;
2) tiesė DE — apskritimo liestinė;
3) $DE \perp AB$.
4) Apskaičiuokite DE, jeigu $AB = a$.

555. Brėžinyje $OB \parallel DC$. Raskite atkarpos DC ilgį, jeigu apskritimo spindulys R.



556. 1) Duota: atkarpa c bei kampai α ir β.



Nubraižykite trikampį ABC, kurio $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$, $AB = c$, naudodamiesi:

a) matlankiu ir liniuote su padalomis; b) skriestuvu ir liniuote.

*2) Kiek tokių trikampių galima nubraižyti priklausomai nuo c, α ir β reikšmių?

557. Apskaičiuokite rombo kampus, jei jo perimetras lygus:

a) 40 cm, o aukštinė yra $5\sqrt{3}$ cm;
b) $16\sqrt{3}$ cm, o aukštinė yra 6 cm.

558. Mokykloje mokosi 49 dešimtokai, iš kurių 24 merginos. Keliais būdais iš šių dešimtokų galima išrinkti merginos ir vaikino porą vakaro vedančiaisiais?

559. Visi klasės dešimtokai baigdami mokyklą apsikeitė fotonuotraukomis. Kiek klasėje buvo dešimtokų, jeigu apsikeitimui prireikė iš viso:

a) 650 fotonuotraukų; b) 870 fotonuotraukų?

560. Iškilajame daugiakampyje nubrėžtos įstrižainės, kurių iš viso yra 20.

a) Kiek kraštinių turi daugiakampis?
b) Kokia šio daugiakampio visų vidaus kampų suma?

561. Su kuriomis x reikšmėmis trupmenos $\frac{x^2+5x+4}{x^2-5x-6}$ reikšmės yra:

a) teigiamos; b) neigiamos; c) neteigiamos; d) neneigiamos?

562. Skalbimo mašina kainuoja 1200 Lt. Perkant ją išsimokėtinai pradinis įnašas yra 700 Lt ir 2 metus reikia mokėti mėnesinius įnašus po:
a) 25 Lt; b) 30 Lt.
Kokia skalbimo mašinos pirkimo išsimokėtinai paprastųjų palūkanų norma?

563. Įrodykite tapatybę:

a) $\frac{a^2-25}{a^2-3a} : \frac{a^2+5a}{a^2-9} = \frac{(a-5)(a+3)}{a^2}$, $a \neq -5$, $a \neq 3$, $a \neq -3$, $a \neq 0$;

b) $\frac{5-5a}{1+2a+a^2} \cdot \frac{3+3a}{10-10a^2} = \frac{3}{2(1+a^2)}$, $a \neq -1$, $a \neq 1$.

564. Viena iš atkarpų, gauta susikirtus trikampyje pusiaukraštinėms, lygi 6 cm. Kokio ilgio yra ta pusiaukraštinė, kurios dalis yra 6 cm?

565. Dviejų skaičių aritmetinis vidurkis lygus 13, o geometrinis vidurkis yra 5. Raskite tuos skaičius.

566. Jonas ir Petras drauge nupjovė pievą per 2 valandas. Petras vienas šią pievą galėjo nupjauti trimis valandomis greičiau negu Jonas. Per kiek laiko šią pievą galėjo nupjauti Jonas ir per kiek Petras?

567. Grafiškai išspręskite lygtį:

a) $x^3 = 2 - x$; b) $x^2 + 4 = x^3$.

568. Išspręskite nelygybių sistemą:

a) $\begin{cases} x - 4 \geqslant 5 - 2x, \\ 3 - 2x < 7 + x; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5 - 3x > 8 - x, \\ x \geqslant 10 - x. \end{cases}$

569. Apskaičiuokite skaičių $3 \cdot 10^{20}$ ir $6 \cdot 10^{22}$:
a) sumą; b) skirtumą; c) sandaugą; d) dalmenį.
Rezultatą parašykite standartine išraiška.

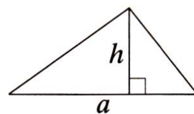
570. Įrodykite, kad trikampis, kurio viršūnės $A(2; 0)$, $B(-4; 3)$ ir $C(-1; -3)$, yra lygiašonis.

571. Krepšinio komandos startinio penketuko žaidėjų amžiaus vidurkis buvo 23,6 metų. Pakeitus vieną žaidėją perspektyviu devyniolikamečiu, aikštelės žaidėjų amžiaus vidurkis tapo 22,8 metų. Kokio amžiaus žaidėjas išėjo iš aikštelės?

572. Atstumas tarp dviejų dviratininkų, važiuojančių plentu, lygus 35 km. Vieno dviratininko greitis 12 km/h, kito — 15 km/h. Koks atstumas tarp dviratininkų bus po 2 valandų (išnagrinėkite visus galimus atvejus)?

2 Sinusų ir kosinusų teoremos

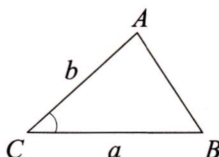
Trikampio plotą, kai žinoma kraštinė a ir į ją nubrėžta aukštinė h, galima apskaičiuoti pagal formulę $S = \frac{1}{2}ah$.



Išmoksime skaičiuoti trikampio plotą, kai žinomos dvi trikampio kraštinės ir kampas tarp jų.

Teorema. *Trikampio plotas lygus dviejų kraštinių ilgių ir kampo tarp jų sinuso sandaugos pusei, t. y.*

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}ab\sin C$$

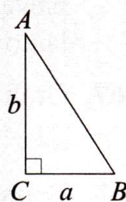


Duota: $\triangle ABC$, $BC = a$, $AC = b$, $\angle C$. *Įrodyti:* $S_{ABC} = \frac{1}{2}ab\sin C$.

Įrodymas. Galimi trys atvejai: 1) $\angle C = 90°$; 2) $\angle C < 90°$; 3) $\angle C > 90°$.

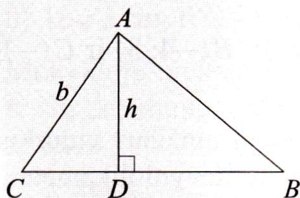
1) Kai $\angle C = 90°$, nesunku patikrinti, kad formulė $S = \frac{1}{2}ab\sin C$ yra teisinga. Iš tikrųjų,

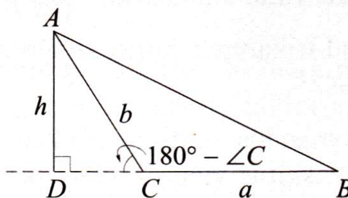
$$\frac{1}{2}ab\sin 90° = \frac{1}{2}ab \cdot 1 = \frac{1}{2}ab = S.$$



Taigi gavome gerai žinomą formulę stačiojo trikampio plotui skaičiuoti, kai žinomi abu jos statiniai.

2) ir 3) atvejus nagrinėsime kartu.
Brėžinyje pavaizduoti du trikampiai ABC, kurių vieno kampas C yra smailus, o kito — bukas.



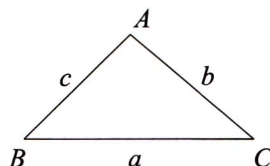


Iš viršūnės A nubrėžkime aukštinę h į kraštinę BC arba jos tęsinį.
Pagal kampų C ir $(180° - \angle C)$ sinusų apibrėžimą turime: $\sin C = \frac{h}{b}$, $\sin(180° - C) = \frac{h}{b}$, t. y. $h = b\sin C$ ir $h = b\sin(180° - C) = b\sin C$.
Abiem atvejais: $S = \frac{1}{2}a \cdot h = \frac{1}{2}ab\sin C$.

Remdamiesi ką tik įrodyta trikampio ploto formule įrodysime teoremą, siejančią visas trikampio kraštines ir kampus.

Sinusų teorema. *Trikampio kraštinių ilgiai proporcingi prieš jas esančių kampų sinusams, t. y.*

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

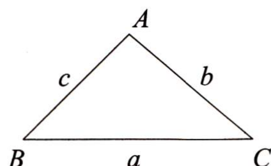


Duota: $\triangle ABC$, $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$. *Įrodyti:* $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$.

Įrodymas. Jau įrodėme, kad: $S = \frac{1}{2}ab\sin C$, $S = \frac{1}{2}bc\sin A$, $S = \frac{1}{2}ac\sin B$. Iš pirmųjų dviejų lygybių gauname $\frac{1}{2}ab\sin C = \frac{1}{2}bc\sin A$. Iš čia $\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}$. Iš pirmosios ir trečiosios lygybių išplaukia, kad $\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$.

Sprendžiant trikampius dažnai reikalinga ir teorema, siejanti trikampio kraštines ir kampų kosinusus.

Kosinusų teorema. *Trikampio kraštinės ilgio kvadratas lygus kitų dviejų kraštinių ilgių kvadratų sumai minus dvigubai tų kraštinių ilgių ir tarp jų esančio kampo kosinuso sandaugai:*

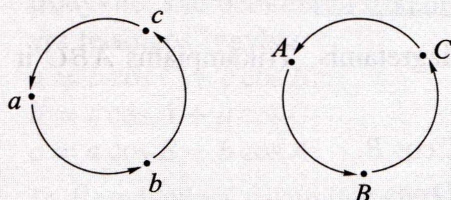


$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A, \qquad (1)$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B, \qquad (2)$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C. \qquad (3)$$

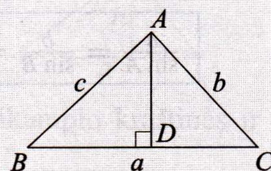
Įrodymas. Pastebėsime, kad iš vienos formulės lengvai gaunama kita formulė atlikus raidžių a, b, c, A, B, C ciklišką keitimą, parodytą schemoje.



Todėl įrodysime tik vieną formulę, pavyzdžiui, $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$. Trikampyje ABC kampas C gali būti: 1) statusis; 2) smailusis; 3) bukasis.

1) Kai $\angle C = 90°$, formulė $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$ yra teisinga. Iš tikrųjų, $a^2 + b^2 - 2ab\cos C = a^2 + b^2 - 2ab \cdot 0 = a^2 + b^2 = c^2$.
Taigi, kai $\angle C = 90°$, įrodoma formulė virsta Pitagoro teorema. Todėl kosinusų teorema kartais vadinama apibendrintąja Pitagoro teorema.

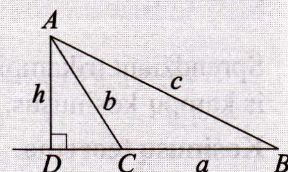
2) Jeigu kampas C — smailusis, tai trikampyje ABC yra dar bent vienas smailusis kampas, pavyzdžiui, $\angle B$. Iš viršūnės A nubrėžę aukštinę AD gauname du stačiuosius trikampius ACD ir ABD.



Iš stačiojo trikampio ACD randame $CD = b\cos C$ ir $AD^2 = b^2 - CD^2$, o iš trikampio ABD randame $c^2 = AD^2 + DB^2 = AD^2 + (a - CD)^2 = AD^2 + a^2 - 2aCD + CD^2$. Į šią lygybę įrašę CD ir AD^2 išraiškas gauname:

$$c^2 = b^2 - CD^2 + a^2 - 2ab\cos C + CD^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C.$$

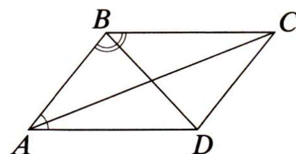
3) Sakykime, kad kampas C yra bukasis.
Iš viršūnės A nubrėžę aukštinę AD gauname du stačiuosius trikampius ACD ir ABD. Iš trikampio ACD: $AD^2 = b^2 - CD^2$ ir $CD = b\cos(180° - C) = -b\cos C$.
Iš trikampio ABD:
$c^2 = AD^2 + BD^2 = AD^2 + (a + CD)^2$.



Į šią lygybę įrašę AD^2 ir CD išraiškas gauname:

$$c^2 = b^2 - CD^2 + a^2 + 2a(-b\cos C) + CD^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C.$$

Iš kosinusų teoremos išplaukia, kad *lygiagretainio įstrižainių kvadratų suma lygi jo kraštinių kvadratų sumai*:



$$AC^2 + BD^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2$$

Sakykime, keturkampis $ABCD$ — lygiagretainis. Trikampiams ABC ir ABD taikome kosinusų teoremą:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC\cos B, \qquad (1)$$
$$BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB \cdot AD\cos A. \qquad (2)$$

Kadangi $\cos B = \cos(180° - A) = -\cos A$ ($\angle A + \angle B = 180°$), $BC = AD$ ir $AB = CD$, tai sudėję (1) ir (2) lygybes gauname:
$AC^2 + BD^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2 = 2(AB^2 + BC^2)$.

Pratimai ir uždaviniai

573. Apskaičiuokite plotą:

a) trikampio, kurio kraštinių ilgiai yra 12 cm ir 8 cm, o kampas tarp jų lygus $135°$;

b) lygiašonio trikampio, kurio šoninė kraštinė lygi 10 cm, o kampas prie pagrindo yra $39°$.

574. a) Įrodykite, kad lygiagretainio plotas lygus jo kraštinių ilgių ir kampo tarp jų sinuso sandaugai.

b) Apskaičiuokite lygiagretainio $ABCD$ plotą, kai $AB = 13$, $BC = 8$, o $\angle A = 68°$.

575. 1) Įrodykite, kad stačiakampio plotą S galima apskaičiuoti pagal formulę $S = \frac{d^2}{2}\sin\alpha$; čia d — stačiakampio įstrižainės ilgis, o α — kampas tarp įstrižainių.

*2) Įrodykite, kad iškilojo keturkampio plotą S galima apskaičiuoti pagal formulę $S = \frac{1}{2}d_1 d_2 \sin\alpha$; čia d_1 ir d_2 — įstrižainių ilgiai, o α — kampas tarp įstrižainių.

576. Remdamiesi sinusų teorema įrodykite, kad:

a) jeigu trikampio du kampai lygūs, tai trikampis yra lygiašonis;

b) trikampyje prieš didesnį kampą yra ilgesnė kraštinė, o prieš ilgesnę kraštinę yra didesnis kampas.

577*. Remdamiesi kosinusų teorema:

a) įrodykite, kad jei trikampio ilgiausioji kraštinė c tenkina sąryšį:
1) $c^2 < a^2 + b^2$, tai trikampis yra smailusis;
2) $c^2 = a^2 + b^2$, tai trikampis yra statusis;
3) $c^2 > a^2 + b^2$, tai trikampis yra bukasis;

b) nustatykite trikampio rūšį pagal kampus ir apskaičiuokite didžiausią trikampio kampą, jeigu jo kraštinės yra:
1) 17, 8, 15; 2) 17, 8, 16; 3) 17, 8, 10.

578. Įrodykite, kad bet kuriam trikampiui ABC ($AB = c$, $AC = b$, $BC = a$) yra teisingos lygybės:
$a = b\cos C + c\cos B$;
$b = c\cos A + a\cos C$;
$c = a\cos B + b\cos A$.

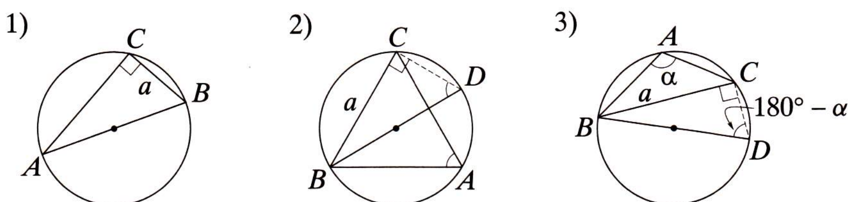
579. 1) Remdamiesi trikampio ploto, kai žinomos dvi kraštinės ir kampas tarp jų, formule įrodykite, kad kampo A pusiaukampinės ilgį galima apskaičiuoti pagal formulę
$l_a = \frac{2bc\cos\frac{A}{2}}{b+c}$.

2) Apskaičiuokite l_a, kai $b = 8$ cm, $c = 5$ cm, $\angle A = 98°$.

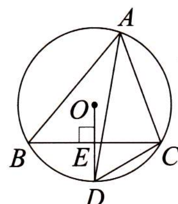
580. a) Remdamiesi kosinusų teorema įrodykite, kad trikampio ABC pusiaukraštinės m_a ilgis skaičiuojamas pagal formulę
$m_a^2 = \frac{b^2+c^2+2bc\cos A}{4}$.
Nurodymas. 1) Pusiaukraštinę $m_a = AD$ pratęskite ir atidėkite atkarpą $DE = m_a$. 2) Įrodykite, kad keturkampis $ABEC$ — lygiagretainis. 3) Trikampiui ABE pritaikykite kosinusų teoremą pastebėdami, kad $\angle ABE = 180° - \angle BAC$.
b) Apskaičiuokite m_a, kai $b = 12$ cm, $c = 9$ cm, $\angle A = 156°$.

581. Apie trikampį ABC ($AB = c$, $BC = a$, $CA = b$) apibrėžtas apskritimas, kurio spindulys yra R. Įrodykite, kad $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$.

Nurodymas. Nagrinėkite tris atvejus: 1) trikampis yra statusis; 2) trikampis yra smailusis; 3) trikampis yra bukasis, ir iš vieno kampo viršūnės nubrėžkite apskritimo skersmenį.



582. Į apskritimą, kurio centras O, įbrėžtas trikampis ABC. Iš centro išvestas statmuo į kraštinę BC kerta apskritimą taške D. Įrodykite, kad:



1) $\angle BCD = \frac{A}{2}$;
2) $DC = 2R\sin\frac{A}{2}$, $CE = 2R\sin\frac{A}{2}\cdot\cos\frac{A}{2}$,
$BC = 2R\sin A$;
3) $\sin A = 2\sin\frac{A}{2}\cdot\cos\frac{A}{2}$.

583. Duotas trikampis ABC ($AB = c$, $BC = a$, $AC = b$).
1) Remdamiesi trikampio ploto formule $S = \frac{1}{2}bc\sin A$ ir 581 uždaviniu įrodykite, kad trikampio plotą galima apskaičiuoti pagal formulę $S = \frac{abc}{4R}$; čia R — apie trikampį ABC apibrėžto apskritimo spindulys.
2) Įrodykite, kad į trikampį įbrėžto apskritimo spindulys $r = \frac{2S}{a+b+c}$.

584. Trikampio ABC plotas lygus 16 cm^2. Apskaičiuokite kraštinės AB ilgį, jeigu $AC = 5$ cm, $BC = 8$ cm ir kampas C yra:
a) smailus; b) bukas.

585*. Trikampio ABC kraštinės $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$.

a) 1) Įrodykite, kad $\sin^2 A = \frac{(a+b+c)(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)}{4b^2c^2}$;

Nurodymas. Remkitės formulėmis

$\sin^2 A = 1 - \cos^2 A$ ir $\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$.

2) Sakykime, $2p = a + b + c$. Įrodykite, kad

$\sin A = \frac{2}{bc}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

3) Įrodykite, kad $S_{ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

(Ši formulė vadinama Herono formule.)

b) Apskaičiuokite plotą trikampio, kurio kraštinių ilgiai yra:

1) 16 cm, 9 cm, 11 cm; 2) 10 cm, 10 cm, 16 cm.

586*. a) Raskite apie trikampį apibrėžto ir į jį įbrėžto apskritimų spindulius, kai:

1) $a = 26$, $b = 28$, $c = 30$ 2) $a = 15$, $b = 13$, $c = 4$

3) $a = 8$, $b = 10$, $c = 14$ 4) $a = 8$, $\angle A = 30°$, $\angle C = 90°$

5) $a = 2\sqrt{3}$, $\angle A = 60°$, $\angle C = 90°$ 6) $a = 25$, $\sin A = \frac{4}{5}$, $\angle C = 90°$

b) Lygiašonio trikampio šoninė kraštinė lygi 13 cm, o aukštinė — 5 cm. Raskite apie šį trikampį apibrėžto ir į jį įbrėžto apskritimų spindulius.

587. Į statųjį trikampį ABC, kurio įžambinė AB yra 13 cm, įbrėžto apskritimo spindulys lygus 2 cm. Raskite kampo A tangentą. Apskaičiuokite kampo A reikšmę 1° tikslumu.

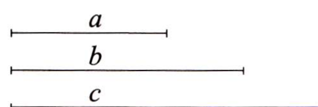
588. Keturkampės piramidės pagrindas yra stačiakampis, kurio įstrižainė lygi d, o kampas tarp įstrižainių — α. Šoninės piramidės briaunos pasvirusios į pagrindo plokštumą lygiais kampais β. Raskite piramidės tūrį.

589. Stačiakampio gretasienio įstrižainė lygi d ir pasvirusi į pagrindo plokštumą kampu α. Kampas tarp pagrindo įstrižainių lygus β. Raskite gretasienio tūrį.

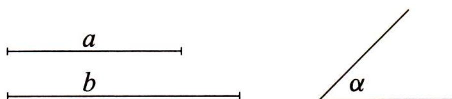
590. Kūgio sudaromoji pasvirusi į pagrindo plokštumą kampu α. Į kūgio pagrindą įbrėžto trikampio kraštinė lygi b, o prieš ją esantis kampas β. Raskite kūgio šoninio paviršiaus plotą.

591. Lygiagretainio $ABCD$ kraštinės CD vidurio taškas M sujungtas su viršūne B. Atkarpa BM kerta įstrižainę AC taške N.
Raskite: a) $BN : NM$; b) $AC : NC$.

592. Duotos trys atkarpos. Skriestuvu ir liniuote nubraižykite trikampį ABC, kurio kraštinės $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$.



593. Duota: atkarpos a ir b; kampas α.



1) Skriestuvu ir liniuote nubraižykite trikampį ABC, kurio $BC = a$, $AC = b$, $\angle A = \alpha$.

*2) Kiek tokių trikampių galima nubraižyti priklausomai nuo a, b ir α reikšmių?

Nurodymas. Atskirai tirkite atvejus, kai $\alpha < 90^\circ$ ir kai $\alpha > 90^\circ$.

594. Ant penkių kortelių užrašyti skaitmenys 1, 2, 3, 4, 5. Kortelės užverčiamos ir sumaišomos. Vieną po kitos atsitiktinai atverčiame dvi korteles ir gauname dviženklį skaičių.

a) Kiek yra iš viso tokių skaičių?

b) Kurie iš įvykių yra vienas kitam priešingi:

A — gautas skaičius yra 5 kartotinis;
B — gautas skaičius sudėtinis;
C — gautas skaičius pirminis;
D — gautas skaičius nelyginis;
E — gautas skaičius lyginis;
F — gautas skaičius nesidalija iš 5?

c) Apskaičiuokite visų išvardytų įvykių tikimybes.

595. Kiek yra trikampių, kurių perimetras lygus 15 cm, o kraštinių ilgiai išreikšti sveikaisiais centimetrų skaičiais?

596. Dėžėje yra 5 žali, 4 balti ir 3 raudoni rutuliai. Apskaičiuokite tikimybę, kad atsitiktinai ištrauktas rutulys yra:

a) žalias arba baltas;

b) žalias arba raudonas.

597. Su kuriomis x reikšmėmis trinario:

a) $x^2 + 2x - 2$ skaitinės reikšmės yra mažesnės už trinario $2x^2 - 3x + 4$ skaitines reikšmes;

b) $x^2 + 5x - 17$ skaitinės reikšmės yra didesnės už trinario $2x^2 - 2x - 7$ skaitines reikšmes?

598. Firmos pajamos per savaitę yra 29 tūkst. litų, o išlaidos:

a) 27,6 tūkst. litų; b) 27,65 tūkst. litų.

Koks firmos pelno mokestis, jeigu pelno mokesčio tarifas 29%?

599. Suprastinkite reiškinį:

a) $\frac{1}{4a} + \frac{1}{2b}$; b) $\frac{3}{a} - \frac{2}{ab}$; c) $\left(\frac{5a}{4b}\right)^{-2}$; d) $\left(\frac{3x}{2y}\right)^{-3}$.

600. Išspręskite lygtį:

a) $2x(x-3) = 7(x-3)$ b) $\frac{x^2-3x+2}{x-3} = x^2 - 3x + 2$

c) $(x-4)^2 = 25$ d) $\frac{x^2}{2} - \frac{x}{3} + 7\frac{3}{8} = 8$

601. Raskite funkcijos reikšmių sritį:

a) $f(x) = x^2 - 4$ b) $f(x) = (x-3)^2$

c) $g(x) = -(x-1)^2 + 4$ d) $g(x) = -x^2 - 1$

602. Aritmetinės progresijos (a_n) narius galima apskaičiuoti pagal formulę:
a) $a_n = -7 + 2n$; b) $a_n = 5 - 0{,}5n$.
Raskite: 1) a_1, d, a_{10}, a_{25}; 2) S_{20}.

603. Stačiakampio, kurio kraštinės lygios 12 ir 5, simetrijos ašys yra koordinačių ašyse.
1) Raskite stačiakampio:
a) viršūnių koordinates; b) įstrižainės ilgį.
2) Parašykite lygtį tiesės, einančios per priešingas stačiakampio viršūnes.

604. Apskaičiuokite $1 - \frac{1}{1+\frac{1}{1-\frac{1}{1+\frac{1}{2}}}}$.

A 1 **B** $\frac{3}{4}$ **C** $\frac{1}{2}$ **D** $\frac{1}{4}$ **E** atsakymas kitoks

605. Dviženklio skaičiaus dešimčių skaitmuo yra 4. Jeigu prie šio dviženklio skaičiaus pridėtume 27, tai gautoji suma būtų parašyta tais pačiais skaitmenimis, tik atvirkščia tvarka. Raskite šį skaičių.

606. Raskite rutulio spindulį, jeigu žinoma, kad rutulio tūris ir paviršiaus plotas išreiškiami tuo pačiu tūrio ir ploto vienetų skaičiumi.

607. Į paukščių fermą atvežė lesalų, kurių užtektų antims 30-čiai dienų, o žąsims — 45-ioms dienoms. Kelioms dienoms užtektų šių lesalų ir antims, ir žąsims šeriant jas ankstesnėmis lesalų normomis?

608. Atstumas tarp dviratininko ir motociklininko, važiuojančių plentu viena kryptimi, yra 3 km. Dviratininko greitis yra 10 m/s, o motociklininko — 54 km/h. Per kiek laiko motociklininkas pavys dviratininką?

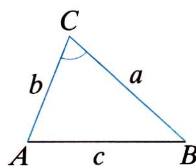
3 Bet kokių trikampių sprendimas

Šeštajame skyriuje nagrinėtas stačiųjų trikampių sprendimas yra atskiras atvejis uždavinių, kuriuos įprasta vadinti trikampių sprendimo uždaviniais.

Šiame skyrelyje apskaičiuosime bet kokio trikampio elementus (kraštines ir kampus), kai žinomi trys jo elementai, iš kurių bent vienas — kraštinės ilgis.

Nagrinėsime keturis trikampių sprendimo atvejus.

1. Žinomos dvi kraštinės a, b ir kampas C tarp jų.



Kraštinę c randame pagal formulę:
$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$.
Kampą A rasime remdamiesi formule:
$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$, $\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$.
$\angle B = 180° - (\angle A + \angle C)$.

1 PAVYZDYS.

Duota: $a = 14\,\text{cm}$, $b = 10\,\text{cm}$, $\angle C = 70°$. *Rasti:* c, $\angle A$, $\angle B$.

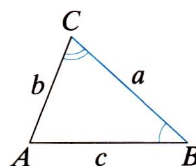
Sprendimas. 1) $c^2 = 14^2 + 10^2 - 2\cdot 14\cdot 10\cos 70° \approx 196 + 100 - 280\cdot 0{,}342 =$
$= 200{,}24$, $c \approx \sqrt{200{,}24} \approx 14{,}2\,(\text{cm})$.

2) $\cos A \approx \frac{10^2+200{,}24-14^2}{2\cdot 14{,}2\cdot 10} \approx 0{,}367$. Lentelėje randame, kad $\angle A \approx 68°$.

3) $\angle B \approx 180° - (68° + 70°) = 42°$.

Atsakymas. $c \approx 14{,}2\,\text{cm}$, $\angle A \approx 68°$, $\angle B \approx 42°$.

2. Žinoma kraštinė a ir du kampai B ir C prie jos.



Kadangi trikampio kampų suma lygi 180°, tai
$\angle A = 180° - \angle B - \angle C$.
Kraštines b ir c rasime remdamiesi sinusų teorema.

2 PAVYZDYS.

Duota: $a = 12\,\text{cm}$, $\angle B = 62°$, $\angle C = 50°$. *Rasti:* b, c, $\angle A$.

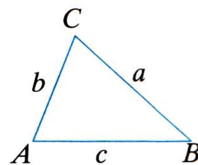
Sprendimas. 1) $\angle A = 180° - 62° - 50° = 68°$.

2) Pagal sinusų teoremą $\frac{b}{\sin B} = \frac{a}{\sin A}$. Iš čia $b = \frac{a\sin B}{\sin A}$. Taigi $b = \frac{12\sin 62°}{\sin 68°} \approx$
$\approx \frac{12\cdot 0{,}883}{0{,}927} \approx 11{,}4\,(\text{cm})$.

3) Analogiškai $c = \frac{a\cdot\sin C}{\sin A} \approx \frac{12\cdot 0{,}766}{0{,}927} \approx 9{,}9\,(\text{cm})$.

Atsakymas. $b \approx 11{,}4\,\text{cm}$, $c \approx 9{,}9\,\text{cm}$, $\angle A = 68°$.

3. Žinomos trys kraštinės.



Remdamiesi kosinusų teorema randame vieno trikampio kampo kosinusą, pavyzdžiui, C: $\cos C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$, o po to ir kampo C didumą.

Analogiškai galima rasti ir kitus kampus, bet galima jų ieškoti ir remiantis sinusų teorema. Suradus kampus verta patikrinti, ar $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$ (bent apytiksliai).

3 PAVYZDYS.

Duota: $a = 8\,\text{cm}$, $b = 5\,\text{cm}$, $c = 10\,\text{cm}$. *Rasti:* $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$.

Sprendimas. 1) $\cos C = \frac{8^2+5^2-10^2}{2\cdot 8\cdot 5} = -\frac{11}{80} \approx -0{,}138$. Kadangi $\cos C < 0$, tai kampas C yra bukas. Lentelėje randame kampą $180^\circ - \angle C$: $180^\circ - \angle C \approx 82^\circ$, $\angle C \approx 180^\circ - 82^\circ = 98^\circ$.

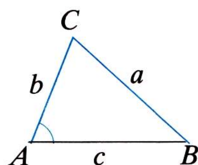
2) $\cos A = \frac{5^2+10^2-8^2}{2\cdot 5\cdot 10} = \frac{25+100-64}{100} = 0{,}61$; $\angle A \approx 52^\circ$.

3) $\cos B = \frac{8^2+10^2-5^2}{2\cdot 8\cdot 10} \approx 0{,}869$; $\angle B \approx 30^\circ$.

Patikrinimas. $\angle A + \angle B + \angle C \approx 52^\circ + 30^\circ + 98^\circ = 180^\circ$.

Atsakymas. $\angle A \approx 52^\circ$, $\angle B \approx 30^\circ$, $\angle C \approx 98^\circ$.

4. Žinomos dvi kraštinės a ir b ir kampas, esantis prieš vieną iš jų, pavyzdžiui, kampas A.



Remdamiesi sinusų teorema apskaičiuojame $\sin B = \frac{b \sin A}{a}$. Lentelėje randame kampo B didumą.

Priklausomai nuo a, b ir A reikšmių galimi trys atvejai:

1) jeigu $\frac{b \sin A}{a} > 1$, tai toks trikampis neegzistuoja;

2) jeigu $\frac{b \sin A}{a} = 1$, tai $\angle B = 90^\circ$ (trikampis statusis);

3) jeigu $\frac{b \sin A}{a} < 1$, tai yra du kampai: $\angle B_1$ ir $\angle B_2 = 180^\circ - \angle B_1$, kurių sinusas lygus tam pačiam skaičiui.

Jeigu $b > a$, tai yra du ieškomi trikampiai. Jeigu $b \leqslant a$, tai yra vienas toks trikampis ($\angle B \leqslant \angle A$ ir kampas B negali būti bukasis).

Kampą C rasime pagal formulę $\angle C = 180^\circ - \angle A - \angle B$, o kraštinę c — pagal formulę $c = \frac{a \sin C}{\sin A}$.

4 PAVYZDYS.

Duota: $a = 12\,\text{cm}$, $b = 20\,\text{cm}$, $\angle B = 68^\circ$. *Rasti:* $\angle A$, $\angle C$, c.

Sprendimas. 1) Iš sinusų teoremos: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$ randame $\sin A = \frac{a \sin B}{b} = \frac{12 \sin 68^\circ}{20} \approx \frac{12\cdot 0{,}927}{20} \approx 0{,}556$. Kadangi $20 > 12$, tai kampas A negali būti bukas. Vadinasi, $\angle A \approx 34^\circ$.

2) $\angle C \approx 180^\circ - 34^\circ - 68^\circ = 78^\circ$.

3) Iš sinusų teoremos: $\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}$ randame $c = \frac{a \sin C}{\sin A} \approx \frac{12 \sin 78^\circ}{\sin 34^\circ} \approx \frac{12\cdot 0{,}978}{0{,}559} \approx 21$ (cm).

Atsakymas. $\angle A \approx 34^\circ$, $\angle C \approx 78^\circ$, $c \approx 21\,\text{cm}$.

5 PAVYZDYS.

Duota: $a = 15\,\text{cm}$, $b = 8\,\text{cm}$, $\angle B = 29^\circ$. *Rasti:* $\angle A$, $\angle C$, c.

Sprendimas. 1) $\sin A = \frac{a \sin B}{b} = \frac{15 \cdot \sin 29^\circ}{8} \approx \frac{15 \cdot 0{,}485}{8} \approx 0{,}909$.

Kadangi $15 > 8$, tai yra du kampai, kurių sinusai lygūs 0,909: $\angle A_1 \approx 65^\circ$ ir $\angle A_2 \approx 180^\circ - 65^\circ = 115^\circ$.

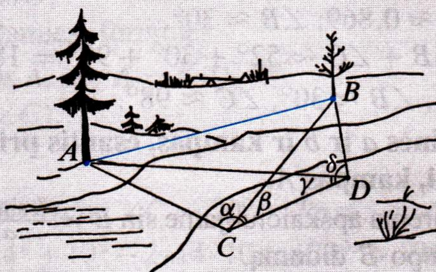
2) $\angle C_1 \approx 180^\circ - 65^\circ - 29^\circ = 86^\circ$; $\angle C_2 \approx 180^\circ - 115^\circ - 29^\circ = 36^\circ$.

3) Kadangi $c = \frac{b \sin C}{\sin B}$, tai $c_1 \approx \frac{8 \sin 86^\circ}{\sin 29^\circ} \approx \frac{8 \cdot 0{,}998}{0{,}485} \approx 16{,}5\,(\text{cm})$;

$c_2 \approx \frac{8 \sin 36^\circ}{\sin 29^\circ} \approx \frac{8 \cdot 0{,}588}{0{,}485} \approx 9{,}7\,(\text{cm})$.

Atsakymas. 1) $\angle A \approx 65^\circ$, $\angle C \approx 86^\circ$, $c \approx 16{,}5\,\text{cm}$;
2) $\angle A \approx 115^\circ$, $\angle C \approx 36^\circ$, $c \approx 9{,}7\,\text{cm}$.

6 PAVYZDYS. Rasime atstumą tarp dviejų neprieinamų objektų A ir B.



Pasirenkame du punktus C ir D, iš kurių matomi abu objektai (žr. brėžinį). Išmatuojame atstumą CD ir kampus: $\angle ACD = \alpha$, $\angle BCD = \beta$, $\angle CDA = \gamma$ ir $\angle CDB = \delta$. Iš trikampio ACD (žinoma kraštinė CD ir du kampai prie jos α ir γ) randame kraštinę AC:

$$AC = \frac{DC \sin \gamma}{\sin(180^\circ - (\alpha + \gamma))} = \frac{DC \sin \gamma}{\sin(\alpha + \gamma)}.$$

Iš trikampio BCD randame kraštinę BC:

$$BC = \frac{DC \cdot \sin \delta}{\sin(\beta + \delta)}.$$

Iš trikampio ACB (žinomos dvi kraštinės ir kampas tarp jų) pagal kosinusų teoremą randame AB:

$$AB = \sqrt{AC^2 + BC^2 - 2AC \cdot BC \cos(\alpha - \beta)}.$$

Pratimai ir uždaviniai

609. Raskite nežinomą trikampio kraštinę:
a) $a = 8$, $b = 9$, $\angle C = 48°$;
b) $a = 7$, $c = 12$, $\angle B = 73°$;
c) $b = 0{,}8$, $c = 1{,}5$, $\angle A = 121°$.

610. Išspręskite trikampį ABC, kai duotos dvi kraštinės ir kampas tarp jų:

a) $a = 50$, $b = 20$, $\angle C = 100°$
b) $a = 20$, $b = 10$, $\angle C = 15°$
c) $b = 14$, $c = 10$, $\angle A = 70°$
d) $a = 14$, $c = 21$, $\angle B = 124°$

611. Išspręskite trikampį ABC, kai duota kraštinė ir du kampai:

a) $a = 12$, $\angle B = 62°$, $\angle C = 50°$
b) $b = 52$, $\angle A = 38°$, $\angle C = 73°$
c) $c = 23$, $\angle A = 24°$, $\angle B = 82°$
d) $a = 30$, $\angle A = 18°$, $\angle B = 96°$

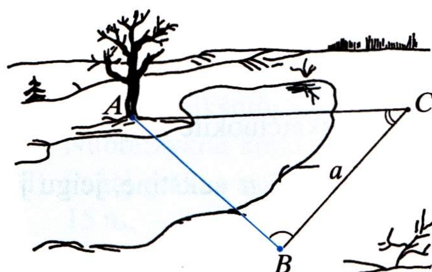
612. Išspręskite trikampį ABC, kai duotos trys kraštinės:

a) $a = 20$, $b = 45$, $c = 50$
b) $a = 53$, $b = 48$, $c = 40$
c) $a = 12{,}5$, $b = 14{,}8$, $c = 20$
d) $a = 125$, $b = 243$, $c = 288$

613. Išspręskite trikampį ABC, kai duotos dvi kraštinės ir kampas prieš vieną iš jų:

a) $a = 25$, $b = 36$, $\angle B = 72°$
b) $c = 10$, $b = 8$, $\angle C = 85°$
c) $a = 10$, $c = 12$, $\angle A = 110°$
d) $a = 10$, $b = 8$, $\angle A = 110°$
e) $c = 10$, $b = 8$, $\angle B = 42°$
f) $c = 10$, $b = 5$, $\angle B = 42°$

614. Remdamiesi brėžiniu raskite atstumą AB. Apskaičiuokite šį atstumą, kai $BC = 50$ m, $\angle ABC = 54°$, $\angle ACB = 32°$.



615. Iškilajame keturkampyje $ABCD$: $AB = 835$ m, $AD = 750$ m, $\angle BAD = 60°$, $\angle ABC = 120°$, $\angle BCD = 80°$. Raskite keturkampio $ABCD$ perimetrą (1 m tikslumu) ir jo plotą (1 m^2 tikslumu).

616. a) Iškilajame keturkampyje $ABCD$: $AB = 10\,\text{m}$, $BC = 9\,\text{m}$, $CD = 15\,\text{m}$, $AD = 12\,\text{m}$, $\angle B = 100^\circ$. Apskaičiuokite keturkampio $ABCD$ įstrižaines AC, BD ir kampus.

b) Iškilajame keturkampyje $ABCD$: $\angle A = 110^\circ$, $\angle B = 85^\circ$, $AB = 9\,\text{m}$, $BC = 8\,\text{m}$, $AD = 14\,\text{m}$. Apskaičiuokite įstrižainę AC, kraštinę CD, kampus C ir D bei įstrižainę BD.

617. Nubraižykite trikampį ABC, kurio $BC = 8\,\text{cm}$, $AB = 5\,\text{cm}$ ir $\angle CBA = 60^\circ$. Apskaičiuokite:

a) AC; b) S_{ABC}.

618. a) Lygiašonės trapecijos pagrindai yra 12 cm ir 7 cm, o šoninė kraštinė pasvirusi į pagrindą 63° kampu. Apskaičiuokite trapecijos plotą.

b) Lygiašonės trapecijos pagrindai yra 35 cm ir 21 cm, o šoninė kraštinė pasvirusi į pagrindą 46° kampu. Apskaičiuokite trapecijos šoninę kraštinę ir plotą.

619. Lygiagretainio gretimos kraštinės yra 8 cm ir 15 cm, o vienas kampas lygus 75°. Apskaičiuokite:

a) lygiagretainio plotą;
b) lygiagretainio įstrižaines;
c) kampą tarp lygiagretainio įstrižainių.

620. Iš taško M, esančio šalia plokštumos α, nubrėžtas į plokštumą α statmuo MP ir dvi pasvirosios MK ir ML. Apskaičiuokite:

a) pasvirųjų ilgius;
b) kampus tarp pasvirųjų ir plokštumos,

jeigu $MP = 15\,\text{cm}$, $PK = 8\,\text{cm}$, $PL = 12\,\text{cm}$.

621. Kvadrato kraštinė lygi 15 cm. Kiekviename jo kampe išpjovus kvadratukus suklijuojama stačiakampio gretasienio formos dėžutė. Jos aukštis yra 2 kartus didesnis už pagrindo kraštinės ilgį. Apskaičiuokite dėžutės tūrį ir paviršiaus plotą.

622. Kubo paviršiaus plotas lygus $726\,\text{cm}^2$. Apskaičiuokite kubo tūrį.

623. Ritinio tūris yra $1\,\ell$. Apskaičiuokite jo spindulį ir aukštinę, jeigu jo pagrindo skersmuo lygus aukštinei.

624. Apskaičiuokite kūgio tūrį, jeigu kūgio šoninis paviršius yra $26\,\text{cm}^2$, o sudaromoji lygi 3,8 cm.

625. Lygiakraštis trikampis, kurio kraštinė yra a cm, sukamas apie ašį, einančią per trikampio viršūnę ir lygiagrečią trikampio kraštinei. Apskaičiuokite gauto kūno tūrį ir paviršiaus plotą.

626. Du šauliai nepriklausomai vienas nuo kito šauna į taikinį. Pirmojo šaulio pataikymo tikimybė 0,75, antrojo — 0,9. Kokia tikimybė, kad:
a) abu šauliai pataikys į taikinį;
b) abu šauliai nepataikys į taikinį;
c) pirmas šaulys pataikys, o antras — ne;
d) pirmas šaulys nepataikys, o antras pataikys į taikinį?

627. Parašyti visi galimi keturženkliai skaičiai, sudaryti iš skaitmenų 1, 2, 3 ir 4 (skaičiuje nėra vienodų skaitmenų). Koks paties didžiausio ir paties mažiausio skaičių skirtumas?

A 2203 **B** 2889 **C** 3003 **D** 3087 **E** 3333

628*. Duota kvadratinė lygtis:
a) $6x^2 + tx + 6 = 0$; b) $2x^2 + tx + 32 = 0$.
Su kuriomis t reikšmėmis lygtis neturi realių sprendinių; turi vieną sprendinį; turi du skirtingus sprendinius?

629. Baldų komplekto kainą perkant išsimokėtinai sudaro pradinis 500 Lt įnašas ir mėnesinės įmokos — po 60 Lt mokant:
a) pusantrų metų; b) dvejus metus.
Kokia baldų komplekto mažmeninė kaina, jeigu kaina perkant išsimokėtinai 25% didesnė už mažmeninę kainą?

630. Išspręskite lygtį:
a) $\frac{x^2-1}{x-1} = 0$; b) $\frac{1}{x+2} = \frac{1}{x^2-4}$.

631. Parašykite lygtį tiesės, einančios per taškus:
a) $A(-2; 2)$ ir $B(1; 5)$; b) $C(-3; 1)$ ir $D(2; -4)$.

632*. Automobilis važiuoja tolygiai greitėdamas su pagreičiu 0,6 m/s^2.
a) Parašykite automobilio nuvažiuoto kelio s (metrais) formulę priklausomai nuo laiko t (sekundėmis).
b) Įrodykite, kad bet kurių dviejų s reikšmių santykis yra lygus atitinkamų t reikšmių santykio kvadratui.
c) Nubraižykite kelio s grafiką kintant laikui t.
d) Pagal grafiką nustatykite laiką, per kurį automobilis nuvažiavo 7,5 m; 15 m.

633. Tarp skaičių 2 ir 14 įterpkite:
a) 3 tokius skaičius; b) 5 tokius skaičius,
kad jie su duotaisiais sudarytų aritmetinę progresiją.

634. Kvadrato įstrižainės, kurios lygios 8, yra koordinačių ašyse. Parašykite lygtis tiesių, kuriose yra kvadrato kraštinės.

635. Visos kartojimo užduotys ruošiantis egzaminui sunumeruotos nuo 1 iki 147. Kiek skaičių reikėjo šioms užduotims sunumeruoti?

A 147 **B** 321 **C** 333 **D** 369 **E** 401

636. Du ūkininkai prikūlė po 4200 cnt miežių. Vieno ūkininko miežių plotas buvo 5 ha mažesnis, bet vidutinis derlingumas 2 cnt didesnis negu kito ūkininko.

a) Koks buvo kiekvieno ūkininko miežių plotas?
b) Koks buvo kiekvieno ūkininko miežių vidutinis derlingumas?

637. Apskaičiuokite reiškinio reikšmę:

a) $\frac{(7\cdot10^{15})\cdot(8\cdot10^{-25})}{4\cdot10^{-20}}$; b) $\frac{6\cdot10^{-18}}{(4\cdot10^{-12})\cdot(3\cdot10^{5})}$.

638. Išskaidykite dauginamaisiais:

a) $b^2 - 4b^3 + 4b - 1$ b) $2y - y^2 - 6x + 9x^2$
c) $b - a - a^2 + b^2$ d) $4x^2 - 2x - y^2 + y$

639. Traukiniu važiuoja 737 turistai. Kiek yra traukinio vagonų ir kiek vietų vagone, jeigu visi vagonai yra užpildyti ir kiekviename vagone važiuoja vienodas turistų skaičius?

4 Taisyklingųjų daugiakampių perimetrai ir plotai. Apskritimo ilgis ir skritulio plotas

Apskritimo, kurio spindulys R, ilgį skaičiavome pagal formulę

$$C = 2\pi R.$$

Skritulio, kurio spindulys R, plotą skaičiavome pagal formulę

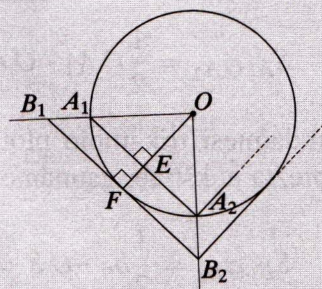
$$S = \pi R^2.$$

Šiame skyrelyje išvesime formules taisyklingųjų daugiakampių perimetrams ir plotams skaičiuoti.
Remdamiesi jomis bandysime pagrįsti apskritimo ilgio ir skritulio ploto formules. Griežtas šių formulių išvedimas remiasi ribų teorija, kuri pagrindinėje mokykloje nenagrinėjama.

Taisyklingųjų daugiakampių perimetrai ir plotai

UŽDAVINYS. Apskaičiuokite į spindulio R apskritimą įbrėžto ir apie jį apibrėžto taisyklingųjų n-kampių perimetrus ir plotus.

Duota: $OA_1 = R$ — apskritimo spindulys, $A_1A_2A_3 \ldots A_n$ — įbrėžtas taisyklingasis n-kampis, $B_1B_2B_3 \ldots B_n$ — apibrėžtas taisyklingasis n-kampis.
Rasti: $P_{nį}$, P_{na}, $S_{nį}$, S_{na}.
Sprendimas.
Sakykime, kad $A_1A_2 = a_n$, $B_1B_2 = b_n$.
Tuomet



$$\angle A_1OA_2 = \angle B_1OB_2 = \frac{360^\circ}{n}, \quad \angle A_1OE = \angle B_1OF = \frac{180^\circ}{n}.$$

Iš stačiųjų trikampių OA_1E ir OB_1F gauname:

$A_1E = \frac{a_n}{2} = R\sin\frac{180^\circ}{n}$, t. y. $\boxed{a_n = 2R\sin\frac{180^\circ}{n}}$ (1)

$B_1F = \frac{b_n}{2} = R\,\mathrm{tg}\,\frac{180^\circ}{n}$, t. y. $\boxed{b_n = 2R\,\mathrm{tg}\,\frac{180^\circ}{n}}$ (2)

Pavyzdžiui, kai $n = 3$, 4 ir 6, tai:
$a_3 = 2R\sin 60° = R\sqrt{3}$, $a_4 = 2R\sin 45° = R\sqrt{2}$, $a_6 = 2R\sin 30° = R$.
$b_3 = 2R\,\mathrm{tg}\,60° = 2R\sqrt{3}$, $b_4 = 2R\,\mathrm{tg}\,45° = 2R$, $b_6 = 2R\,\mathrm{tg}\,30° = \frac{2\sqrt{3}R}{3}$.
Iš (1) ir (2) formulių išplaukia, kad

$$a_n = b_n \cos\frac{180°}{n} \tag{3}$$

Gautos formulės sieja tris dydžius R, a_n ir b_n. Žinant vieną iš jų galima rasti kitus du dydžius.
Remdamiesi (1) ir (2) formulėmis gauname:

$$P_{n\text{į}} = na_n = 2nR\sin\frac{180°}{n} \tag{4}$$

$$P_{n\text{a}} = nb_n = 2nR\,\mathrm{tg}\,\frac{180°}{n} \tag{5}$$

Apskaičiuosime trikampių A_1OA_2 ir B_1OB_2 plotus.
Remdamiesi trikampio ploto formule, kai žinomos dvi trikampio kraštinės ir kampas tarp jų, gauname:

$$S_{A_1OA_2} = \frac{1}{2}OA_1 \cdot OA_2 \cdot \sin\frac{360°}{n} = \frac{R^2}{2}\sin\frac{360°}{n}.$$

Remdamiesi trikampio ploto formule, kai žinoma trikampio kraštinė ir į ją nubrėžta aukštinė, gauname:

$$S_{B_1OB_2} = \frac{1}{2}b_n \cdot OF = R^2\,\mathrm{tg}\,\frac{180°}{n}.$$

Vadinasi,

$$S_{n\text{į}} = n \cdot S_{A_1OA_2} = \frac{R^2}{2} \cdot n\sin\frac{360°}{n} \tag{6}$$

$$S_{n\text{a}} = n \cdot S_{B_1OB_2} = R^2 n\,\mathrm{tg}\,\frac{180°}{n} \tag{7}$$

Apskritimo ilgis

Išvesime formulę apskaičiuoti apskritimo ilgiui, kai žinomas spindulys.

Į spindulio R apskritimą įbrėžkime ir apie jį apibrėžkime taisyklinguosius n-kampius. Jų perimetrai skaičiuojami pagal (4) ir (5) formules. Su skaičiuokliu nesunku įsitikinti, kad, didinant daugiakampio kraštinių skaičių, $P_{n\text{į}}$ didėja, o $P_{n\text{a}}$ — mažėja. Remiantis ribų teorija įrodoma, kad, neribotai didinant daugiakampio kraštinių skaičių n, $P_{n\text{į}}$ ir $P_{n\text{a}}$ artėja prie to paties skaičiaus. Tas skaičius vadinamas apskritimo ilgiu ir žymimas raide C.

Nagrinėkime dabar du apskritimus, kurių spinduliai R ir R'. Apie juos apibrėžkime taisyklinguosius n-kampius ir apskaičiuokime jų perimetrų santykį:

$$\frac{P_{n\text{a}}}{P'_{n\text{a}}} = \frac{2nR\,\text{tg}\,\frac{180^\circ}{n}}{2nR'\,\text{tg}\,\frac{180^\circ}{n}} = \frac{2R}{2R'}.$$

Gautoji lygybė teisinga su bet kuria n reikšme. Kai n neribotai didinsime, $P_{n\text{a}}$ artės prie C, o $P'_{n\text{a}}$ artės prie C'. Vadinasi,

$$\frac{C}{C'} = \frac{2R}{2R'}, \quad \text{t. y.} \quad \frac{C}{2R} = \frac{C'}{2R'}.$$

Gavome, kad apskritimo ilgio ir jo skersmens santykis nepriklauso nuo apskritimo spindulio. Tas santykis žymimas graikiška raide π. Taigi $\frac{C}{2R} = \pi$, t. y.

$$C = 2\pi R.$$

Įrodyta, kad skaičius π — iracionalus. Archimedas (III a. pr. Kr.), skaičiuodamas į apskritimą, kurio spindulys lygus 1, įbrėžto ir apie tą apskritimą apibrėžto taisyklingųjų 96-kampių perimetrus, nustatė, kad

$$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{10}{70}.$$

Adrianas Mecijus XVI a. surado 7 tikslius skaičiaus π skaitmenis: $\pi \approx \frac{355}{113} = 3{,}1415929\ldots$ Šį skaičių lengva atsiminti parašius paeiliui po du kartus tris pirmuosius nelyginius natūraliuosius skaičius: 113355. Paskutiniai šio skaičiaus trys skaitmenys yra Mecijaus duotos π reikšmės skaitiklis, o pirmieji trys skaitmenys — trupmenos vardiklis.

Dabartiniu metu yra žinoma virš milijono skaičiaus π skaitmenų. Apskritimo ilgio ir skersmens santykį raide π pradėjo žymėti Leonardas Oileris (1707–1783). π — graikiško žodžio „$\pi\varepsilon\rho\iota\varphi\varepsilon\rho\varepsilon\iota\alpha$“ (periferеia) — pirmoji raidė.

Skritulio plotas

Nagrinėjant į skritulį, kurio spindulys R, įbrėžtų ir apie jį apibrėžtų taisyklingųjų n-kampių plotus, pagal (6) ir (7) formules galima įsitikinti (su skaičiuokliu), kad, didinant kraštinių skaičių n, įbrėžtų į skritulį daugiakampių plotai didėja, o apibrėžtų — mažėja. Kai n neribotai didėja, tie plotai artėja prie to paties skaičiaus, kuris vadinamas skritulio plotu. Jis žymimas raide S.

Kadangi $S_{na} = R^2 \cdot n \operatorname{tg} \frac{180°}{n} = \frac{1}{2} P_{na} \cdot R$, tai, n neribotai didėjant, gauname

$$S = \frac{1}{2} 2\pi R \cdot R = \pi R^2.$$

Taigi skritulio, kurio spindulys R, plotas apskaičiuojamas pagal formulę:

$$S = \pi R^2.$$

Pratimai ir uždaviniai

640. Taisyklingojo trikampio kraštinė lygi 6 cm. Apskaičiuokite apie šį trikampį apibrėžto apskritimo spindulį ir apie apskritimą apibrėžto taisyklingojo trikampio kraštinę.

641. Apie apskritimą apibrėžto taisyklingojo keturkampio kraštinė lygi 8 cm. Raskite apskritimo spindulį ir į šį apskritimą įbrėžto taisyklingojo keturkampio kraštinę.

642. Apie apskritimą apibrėžto taisyklingojo šešiakampio kraštinė lygi 12 cm. Raskite apskritimo spindulį ir į šį apskritimą įbrėžto taisyklingojo šešiakampio kraštinę.

643. Apskritimo spindulys lygus 10 cm. Apskaičiuokite:

a) į apskritimą įbrėžto ir apie jį apibrėžto taisyklingųjų penkiakampių perimetrus ir plotus;

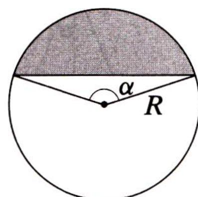
b) į apskritimą įbrėžto ir apie jį apibrėžto taisyklingųjų dešimtkampių perimetrus ir plotus.

644. a) Atstumas tarp lygiagrečių taisyklingojo šešiakampio kraštinių lygus 24 cm. Apskaičiuokite šešiakampio plotą.

b) Atstumas tarp lygiagrečių taisyklingojo aštuonkampio kraštinių lygus 50 cm. Apskaičiuokite aštuonkampio plotą.

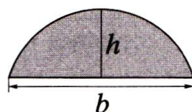
645. Metalinę plokštelę 15 kniedžių reikia pritvirtinti prie agregato. Kniedės turi būti vienodais atstumais išsidėsčiusios apskritime, o atstumas tarp jų centrų 30 mm. Apskaičiuokite to apskritimo spindulį.

646*. a) Įrodykite, kad brėžinyje pavaizduotos nuopjovos plotą galima apskaičiuoti pagal formulę: $S_{\text{nuop}} = \frac{R^2}{2}\left(\frac{\pi}{180} \cdot \alpha - \sin\alpha\right)$.



b) Įrodykite, kad brėžinyje pavaizduotos nuopjovos plotą, kai kampas α matuojamas radianais, galima apskaičiuoti pagal formulę: $S_{\text{nuop}} = \frac{R^2}{2}(\alpha - \sin\alpha)$.

Pastaba. Praktikoje nuopjovos plotas dažnai apskaičiuojamas pagal formulę $S_{\text{nuop}} \approx \frac{2}{3}b \cdot h$; čia b — nuopjovos pagrindas, o h — nuopjovos aukštinė.



647. 1) Apskaičiuokite plotą nuopjovos, jei skritulio spindulys yra 10 cm, o centrinis kampas atitinkantis nuopjovą lygus: a) 52°; b) $\frac{\pi}{12}$;
2) Apskaičiuokite plotą nuopjovos, kurios $b = 10{,}2$ cm, o $h = 6{,}3$ cm.

648*. Raskite plotą skritulio dalies, esančios tarp dviejų lygiagrečių stygų, jeigu skritulio spindulys lygus R, o stygos iš centro matomos 30° ir 90° kampais (du atvejai).

649. Į 18 cm spindulio skritulį įbrėžtas taisyklingasis devynkampis. Apskaičiuokite plotą nuopjovos, kurią atkerta nuo skritulio šio devynkampio kraštinė.

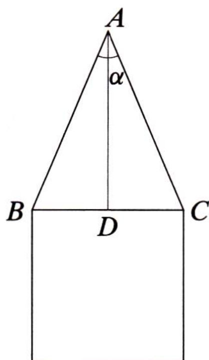
650. Apskaičiuokite nuopjovos plotą, jei skritulio spindulys lygus 5 dm, o centrinis kampas, atitinkantis nuopjovą lygus 1,2 radiano.

651. Skritulio išpjovos perimetras 28 cm, o plotas — 49 cm^2. Raskite spindulį.

652. Į skritulį įbrėžto kvadrato kraštinė nuo skritulio atkerta nuopjovą, kurios plotas lygus $(2\pi - 4)$ cm^2. Raskite kvadrato kraštinę.

653. Kampas tarp spindulio OM, kertančio vienetinį pusapskritimį, ir teigiamos pusašės Ox lygus α.
Raskite taško M koordinates, kai:
a) $OM = 2$, $\alpha = 30°$;
b) $OM = 3$, $\alpha = 90°$;
c) $OM = 1{,}5$, $\alpha = 135°$;
d) $OM = 1$, $\alpha = 180°$;
e) $OM = 5$, $\alpha = 120°$.

654. Apskaičiuokite lygiašonio trikampio BAC kampą prie viršūnės A, jeigu šio trikampio plotas lygus plotui kvadrato, kurio kraštinė yra BC.



655. Apskaičiuokite plotą trikampio, kurio kraštinė lygi a, o prie jos esantys kampai — β ir γ.

656. Metamos 50 ct, 20 ct ir 10 ct monetos. Apskaičiuokite tikimybę įvykio A — „atsivertusių skaičių suma lygi 60“.

657. Nagrinėjamos trys figūros: kvadratas, kurio kraštinės ilgis yra x, stačiakampis, kurio plotis yra $\frac{x}{2}$, o ilgis — $\frac{x}{2}+4$, ir lygiakraštis trikampis, kurio kraštinės ilgis yra $x+1$.

1) Apskaičiuokite šių figūrų perimetrus $P_1(x)$, $P_2(x)$ ir $P_3(x)$.
2) Stačiakampėje koordinačių plokštumoje (Ox ašyje ilgio vienetas — 0,5 cm, o Oy ašyje — 1 cm) nubraižykite funkcijų $P_1(x)$, $P_2(x)$ ir $P_3(x)$ grafikus d_1, d_2 ir d_3.
3) Apskaičiuokite grafikų susikirtimo taškų koordinates.
4) Remdamiesi grafiku surašykite figūrų perimetrus didėjimo tvarka, kai: a) $x = 6$; b) $x = 3{,}5$.
5) Nurodykite, kurios figūros perimetras yra didžiausias (priklausomai nuo x reikšmės).
6) a) Apskaičiuokite minėtų figūrų plotus $S_1(x)$, $S_2(x)$ ir $S_3(x)$.
   b) Plotus parašykite didėjimo tvarka, kai $x = 3$.
   c) Su kuria x reikšme kvadrato plotas lygus dvigubam stačiakampio plotui?
   d) Su kuriomis x reikšmėmis (x — teigiamas) kvadrato plotas yra mažesnis už stačiakampio plotą?

Pasitikrinkite

1. Apskaičiuokite:
a) $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, jei $\sin\alpha = \frac{4}{5}$, $90^\circ < \alpha < 180^\circ$;
b) $\sin\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, jei $\cos\alpha = -\frac{4}{5}$;
c) $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, jei $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{5}{12}$;
d) $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, jei $\operatorname{ctg}\alpha = -\frac{1}{2}$.

2. Nubraižykite kampą, kurio:
a) $\sin\alpha = \frac{3}{5}$; b) $\cos\alpha = -\frac{1}{2}$; c) $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{3}{4}$.
1) Kampo didumą išmatuokite matlankiu.
2) Apskaičiuokite kampo didumą 1° tikslumu remdamiesi lentele.

3. Apskaičiuokite:
a) $\cos 25^\circ + \cos 65^\circ + \cos 115^\circ - \sin 65^\circ$;
b) $\sin 35^\circ + \sin 75^\circ - \sin 105^\circ - \cos 55^\circ$;
c) $\sin 45^\circ \cdot \operatorname{tg} 135^\circ - \cos 135^\circ \cdot \operatorname{tg} 45^\circ + \sin 135^\circ \cdot \cos 135^\circ$;
d) $\cos^2 25^\circ + \cos^2 65^\circ + \cos^2 115^\circ + \sin^2 65^\circ$;
e) $\sin\frac{\pi}{6} + \cos\frac{\pi}{3} + \sin\frac{\pi}{2} + \cos\frac{2\pi}{3} + \sin\frac{5\pi}{6} + \cos\pi$;
f) $\sin\frac{3\pi}{4} + \cos\frac{3\pi}{4} - \sin\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{5\pi}{6} + \cos\frac{2\pi}{3}$;
g) $\sin^2\frac{\pi}{10} + \sin^2\frac{2\pi}{10} + \sin^2\frac{3\pi}{10} + \sin^2\frac{4\pi}{10}$;

4. Naudodamiesi lentele apskaičiuokite:
a) $\sin 112^\circ$; b) $\cos 132^\circ$; c) $\operatorname{tg} 156^\circ$.

5. Naudodamiesi lentele ar skaičiuokliu apskaičiuokite:

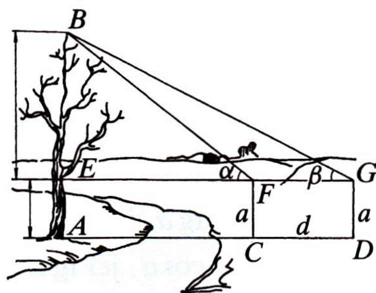
a) $\sin 98^\circ 50'$ b) $\sin 120^\circ 15'$ c) $\cos 139^\circ 52'$
d) $\cos 165^\circ 12'$ e) $\operatorname{tg} 102^\circ 49'$ f) $\operatorname{tg} 161^\circ 12'$

6. Nurodykite sandaugos ženklą:
a) $\sin 123^\circ \cdot \operatorname{tg} 141^\circ \cdot \cos 97^\circ$;
b) $\operatorname{tg} 95^\circ \cdot \cos 105^\circ$;
c) $\cos 96^\circ \cdot \operatorname{ctg} 120^\circ \cdot \operatorname{tg} 152^\circ$.

7. Apskaičiuokite plotą lygiašonio trikampio, kurio kampas prie pagrindo lygus 51°, o šoninė kraštinė lygi 12 cm.

8. Lygiagretainio dvi gretimos kraštinės yra 8 cm ir 12 cm, o kampas tarp jų lygus 50°. Apskaičiuokite:
a) lygiagretainio plotą (1cm^2 tikslumu);
b) lygiagretainio įstrižaines (1cm tikslumu);
c) kampą tarp lygiagretainio įstrižainių.

9. Remdamiesi brėžiniu raskite medžio aukštį. Apskaičiuokite aukštį, kai $d = 10\,\text{m}$, $a = 1{,}8\,\text{m}$, $\alpha = 37^\circ$, $\beta = 32^\circ$.



10. Į R spindulio apskritimą įbrėžtas trikampis, kurio du kampai yra 45° ir 60°. Raskite trikampio plotą.

11. a) Trikampio plotas lygus 9, dvi kraštinės yra 5 ir 6, o kampas tarp jų — smailus. Raskite trečiąją trikampio kraštinę.
Nurodymas. Remkitės trikampio ploto formule ir kosinusų teorema.
b) Trikampio plotas lygus 32, dvi kraštinės yra 10 ir 8, o kampas tarp jų — bukas. Raskite trečiąją trikampio kraštinę.

12. Raskite nežinomą trikampio kraštinę:

a) $a = 10$, $b = 8$, $\angle C = 52^\circ$; b) $b = 12$, $c = 15$, $\angle A = 63^\circ$;
c) $a = 25$, $c = 18$, $\angle B = 134^\circ$.

13. Išspręskite trikampį ABC, kai duotos dvi kraštinės ir kampas tarp jų:

a) $a = 25$, $b = 16$, $\angle C = 125^\circ$ b) $a = 20$, $b = 15$, $\angle C = 20^\circ$
c) $b = 8$, $c = 15$, $\angle A = 80^\circ$ d) $a = 12$, $b = 25$, $\angle C = 132^\circ$

14. Išspręskite trikampį ABC, kai duota kraštinė ir du kampai:

a) $b = 18$, $\angle A = 20^\circ$, $\angle C = 95^\circ$; b) $a = 25$, $\angle B = 48^\circ$, $\angle C = 72^\circ$;
c) $c = 30$, $\angle A = 25^\circ$, $\angle B = 49^\circ$.

15. Išspręskite trikampį ABC, kai duotos trys kraštinės:

a) $a = 14$, $b = 17$, $c = 21$; b) $a = 9$, $b = 6$, $c = 7$;
c) $a = 130$, $b = 235$, $c = 298$.

16. Išspręskite trikampį ABC, kai duotos dvi kraštinės ir kampas prieš vieną iš jų:

a) $a = 18$, $c = 25$, $\angle C = 80^\circ$; b) $b = 24$, $c = 18$, $\angle B = 74^\circ$;
c) $a = 14$, $b = 18$, $\angle B = 95^\circ$; d) $c = 12$, $a = 10$, $\angle A = 50^\circ$.

17. Statusis trikampis sukamas apie statinį, kurio ilgis yra 12 dm. Kampas prie šio statinio lygus 30°. Raskite gauto sukinio tūrį ir viso paviršiaus plotą.

18. Su kuriomis x reikšmėmis:
a) trinaris $-x^2+6x-8$ įgyja teigiamas reikšmes;
b) trinaris x^2-6x+8 įgyja neigiamas reikšmes;
c) trupmena $\frac{x^2-3x+2}{x-3}$ įgyja neneigiamas reikšmes;
d) trupmena $\frac{x-2}{x^2-8x+15}$ įgyja neteigiamas reikšmes?

19. Vaizdo kamera kainuoja 1500 Lt. Perkant išsimokėtinai pradinis įnašas yra 900 Lt ir 2 metus reikia mokėti mėnesinius įnašus po:
a) 37,5 Lt; b) 35 Lt.
Kokia vaizdo kameros pirkimo išsimokėtinai paprastųjų palūkanų norma?

20. Išspręskite nelygybių sistemą:
a) $\begin{cases} \frac{x}{3}-1 \geqslant \frac{x}{2}, \\ (x+1)^2 > (x-4)(x+4); \end{cases}$ b) $\begin{cases} (x-1)^2 < (x-3)(x+3), \\ \frac{x}{4}+4 \geqslant \frac{x}{2}. \end{cases}$

21. Suprastinkite reiškinį:
a) $\frac{4a}{b^2-a^2}\cdot\frac{b+a}{2a}$; b) $\frac{b^2-2b}{3}:(b-2)$; c) $\frac{5x^2}{x-1}-5x$; d) $\frac{3y}{y+1}+\frac{4}{y-1}-3$.

22. Tekintojas per tam tikrą laiką turėjo pagaminti 450 detalių. Viršydamas dienos normą 10 detalių, tekintojas pagamino 480 detalių jau trimis dienomis anksčiau numatyto termino.
a) Kiek detalių turėjo pagaminti tekintojas per dieną?
b) Per kiek dienų tekintojas turėjo atlikti užsakymą?

23. Suprastinę reiškinius $32\cdot2^{-6}$ ir $3^{-4}\cdot27$ apskaičiuokite jų:
a) sumą; b) skirtumą; c) sandaugą; d) dalmenį; e) kvadratų sumą; f) kvadratų skirtumą; g) dalmens kubą.

24. Iškėlę bendrą dauginamąjį už skliaustų įrodykite, kad:
a) $2\cdot10^{12}+5\cdot10^{13}+4\cdot10^{14}=4{,}52\cdot10^{14}$;
b) $2\cdot10^{-12}+5\cdot10^{-13}+4\cdot10^{-14}=2{,}54\cdot10^{-12}$;
c) $8\cdot10^{9}-6\cdot10^{10}-2\cdot10^{11}=-2{,}52\cdot10^{11}$;
d) $8\cdot10^{-9}-6\cdot10^{-10}-2\cdot10^{-11}=7{,}38\cdot10^{-9}$.

25. Pirmame vario ir sidabro lydinyje, sveriančiame 2 kg, yra 12,5% sidabro, o antrame, sveriančiame 3 kg, yra 18% sidabro.
a) Kiek kilogramų sidabro yra pirmame lydinyje?
b) Kiek kilogramų sidabro yra antrame lydinyje?
c) Kokia lydinio, gauto sulydžius abu lydinius, masė ir kiek naujajame lydinyje yra sidabro?
d) Kiek procentų sidabro yra naujajame lydinyje?
e) Kiek kilogramų kiekvieno duotųjų lydinių reikia paimti, kad sulydę paimtas dalis gautume 4 kg lydinį su 15,25% sidabro?

26. Važiuojant 75 km/h greičiu kelionė truko 1 h 20 min. Kiek laiko truktų kelionė važiuojant: a) $6\frac{2}{3}$% didesniu greičiu; b) 20% mažesniu greičiu?

Skyrelių „Pasitikrinkite“ uždavinių atsakymai

1

1. a) 618 Lt; b) 955,08 Lt; c) 1312,38 Lt; d) 1691,13 Lt. **2.** a) 6%; b) 7%.

3. a) 4449,98 Lt; b) 4198,10 Lt. **4.** a) Po 2 metų; b) po 3 metų.

5. a) 5000 Lt; b) 7,5%; c) 5375 Lt, 5778,13 Lt, 6211,48 Lt, 6677,35 Lt, 7178,15 Lt; d) 3295,25 Lt, 4586,19 Lt.

6. a) 2092,60 Lt; b) 2128,80 Lt; c) 2116,56 Lt; d) 2141,23 Lt.

7. a) 2000 Lt; b) 720 Lt, 480 Lt, 240 Lt.

8.

Mokėjimai (metai)	Paskolos likutis (litai)	Palūkanos (litai)	Grąžinama paskola (litai)	Iš viso grąžinama (litai)
1	6000	720	1500	2220
2	4500	540	1500	2040
3	3000	360	1500	1860
4	1500	180	1500	1680
Iš viso:	—	1800	6000	7800

9.

Mokėjimai (metai)	Paskolos likutis (litai)	Palūkanos (litai)	Grąžinama paskola (litai)	Iš viso grąžinama (litai)
1	8000	1200	1600	2800
2	6400	960	1600	2560
3	4800	720	1600	2320
4	3200	480	1600	2080
5	1600	240	1600	1840
Iš viso:	—	3600	8000	11 600

10. a) 150 Lt; b) 15,36%; c) 138 Lt; d) 107,46 Lt.

11. a) 208,80 Lt, 177,48 Lt; b) 47,8%, 55,63%. **12.** a) 31 250; b) 6250.

13. a) 3200 Lt; b) 2560 Lt. **14.** a) 162 000; b) 1 458 000.

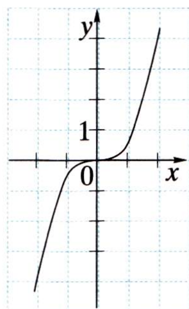
15. a) 4851 Lt; b) 4975 Lt. **16.** a) 217 Lt; b) 223 Lt; c) 1874 Lt; d) 2536 Lt.

17. a) -12, 0; b) 0, $\frac{1}{3}$; c) -5, 12; d) -8, 3.

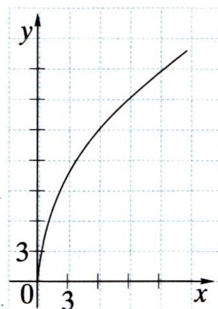
18. a) Sprendinių nėra; b) $x < -\frac{2}{3}$. **19.** a) 1; b) $\frac{4}{45}$; c) $\frac{5}{36}$; d) 81.

2

1. $k = \frac{1}{2}$;

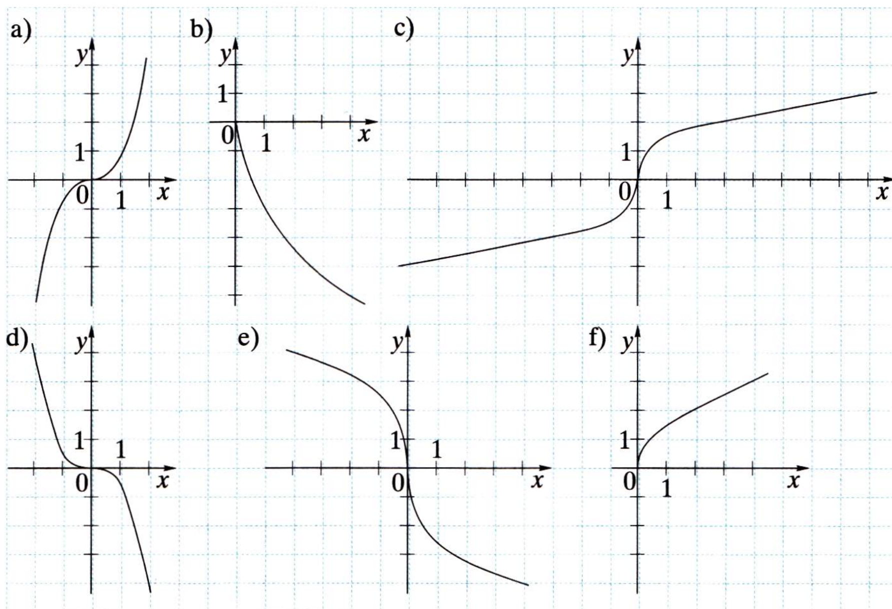


2.



3. $k = 1{,}5$.

4.



5. a) Vienas sprendinys; b) du sprendiniai; c) vienas sprendinys.

6. a) $x < 2$, $x > 6$; b) $-2{,}4 < x < -1{,}4$; $1{,}4 < x < 2{,}4$;
c) $x < -1$, $x > 1$.

7. $a < 0, k < 0$. **8.** e) ir f).

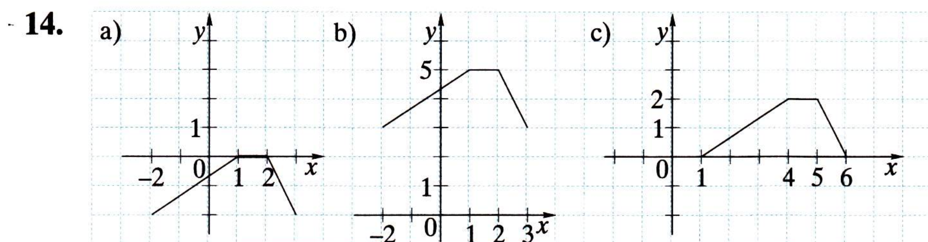
9. Kai $k < 0$, funkcija mažėja; kai $k > 0$ — didėja.

10. a) $-1{,}5$ — mažiausia funkcijos reikšmė;
b) 2 — didžiausia funkcijos reikšmė.

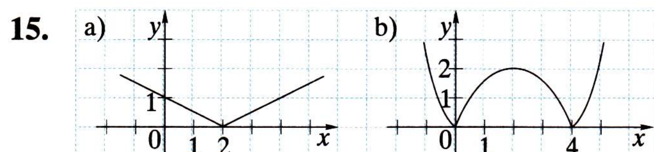
11. a), b), c) ir f). **12.** a) Vieną; b) du.

13. a) $[-5; 7]$; b) $[-5; 7]$; c) $[-2; 10]$; d) $[-10; 2]$; e) $[1; 13]$.

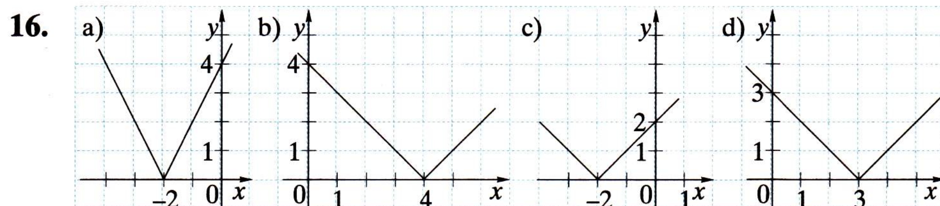
14.



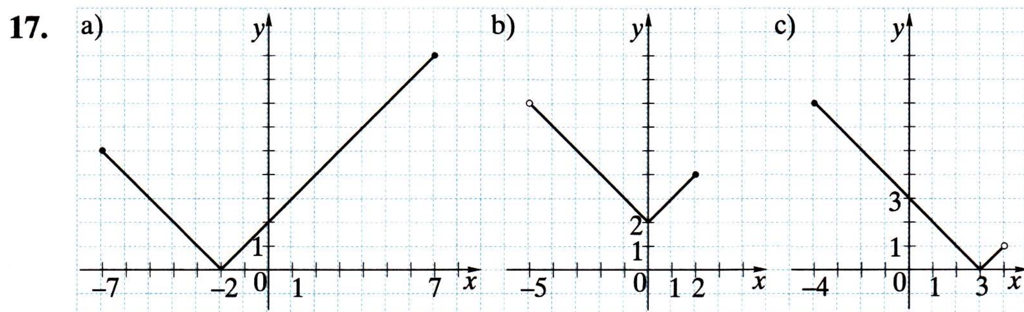
15.



16.



17.



18. a) 8,5%; b) 9,5%. **19.** a) 15 555,56 Lt; b) 5185,19 Lt.

20. a) 69 938 Lt; b) 116 402 Lt. **21.** a) 22,62 Lt; b) 57,23 Lt.

22. a) 1056,34 Lt; b) 986,84 Lt.

23. a) $S = 7500 + 600t$; b) $S = 7500 + 675t$.

24. a) (2; −1); b) (2; −1). **25.** a) 3; b) $\frac{2}{3}$.

26. a) $1\frac{2}{3}$, $2\frac{1}{2}$; b) $-\frac{1}{4}$, 2.

27. a) 24 cm, 7 cm; b) 84 cm^2; c) 56 cm; d) $3\frac{31}{48}$ cm.

28. a) 15 cm; b) 10 cm; c) $\sqrt{505}$ cm, $\sqrt{145}$ cm.

29. a) 6 : 5 : 4; b) 27 : 25 : 23.

30. a) 5 cm; b) 65π cm^2. **31.** a) $x > 5$; b) $x < 2$.

3

1. a) (1; 0); b) ($\approx 0{,}2$; $\approx 5{,}8$), ($\approx 4{,}8$; $\approx 1{,}2$) ; c) ($\approx 2{,}8$; $\approx 2{,}8$), ($\approx -2{,}8$; $\approx -2{,}8$); d) ($\approx -3{,}6$; $\approx 3{,}6$), ($\approx 2{,}8$; $\approx 0{,}9$).

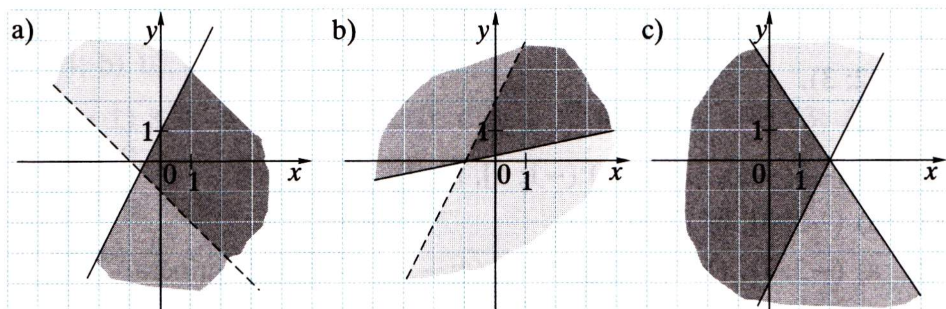
2. a) $\left(1; \frac{3}{4}\right)$; b) (−2; 5), (5; −2); c) (2; −2); d) (5; −1), (−3; −5); e) (−10; 8), (−10; −8), (10; −8), (10; 8); f) (1; 5), (5; 1).

3. a) Taip; b) taip. **4.** 9 ir 10. **5.** Per 10 h, per 15 h.

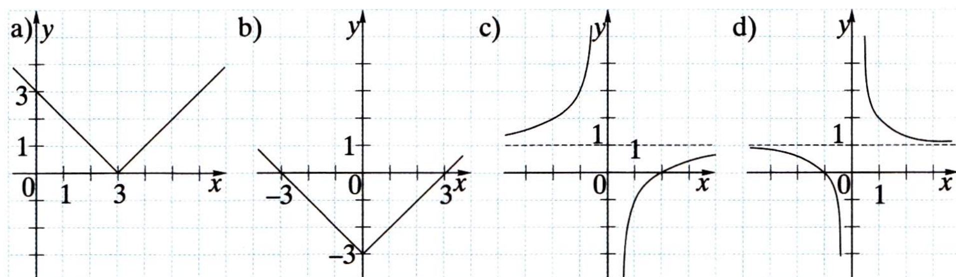
6. Keleivinio traukinio greitis yra 70 km/h, o prekinio — 50 km/h.

7. 7 m × 8 m. **8.** 5 cm, 12 cm, 30 cm^2. **9.** −5 ir −10 arba 10 ir 5.

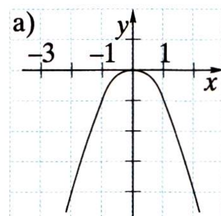
10.



11.



12.



b) $(-\infty; 0]$;
c) didžiausia reikšmė yra 0, mažiausia — −9;
didžiausia reikšmė yra 0, mažiausia — −16;
didžiausia reikšmė yra −1, mažiausia — −9;
didžiausia reikšmė yra −1, mažiausia — −4.

13. 8400 Lt; 9000 Lt. **14.** a) 10; b) 15; c) $\frac{3}{5}$.

15. a) −4; b) 9; c) $x^4 - y^4$; d) $n^4 - m^4$. **16.** a) 12 cm; b) 9 cm.

17. a) 9 cm, 12 cm; b) 108 cm^2; c) 2 : 3; d) 216π cm^2; e) 324π cm^3. **18.** 7 kg.

4

1. a) $x < -2, x > 1$; b) $x \leqslant -1, x \geqslant 5$; c) $-2 < x < 2$.

2. a) $(-\infty; -1)$, $(5; +\infty)$; b) $(-1; 2{,}5)$; c) 1; d) $(1; 17{,}5)$; e) $(-2; 2)$; f) $(-\infty; 2)$, $(2; +\infty)$; g) $(-\infty; 0)$, $(0; +\infty)$; h) $(-\infty; -8)$, $(8; +\infty)$; i) $[0; 4]$; j) $\left[-\frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right]$; k) $(-\infty; -1)$, $\left(16\frac{2}{3}; +\infty\right)$; l) $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right)$, $\left(1\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

3. $[0; 4]$.

4. a) $25x^2 + 1 - 10x = (5x-1)^2 \geqslant 0$; b) $1 + 36x^2 - 12x = (6x-1)^2 \geqslant 0$.

5. 5. **6.** C.

7. E.

8. $(2; 3)$.

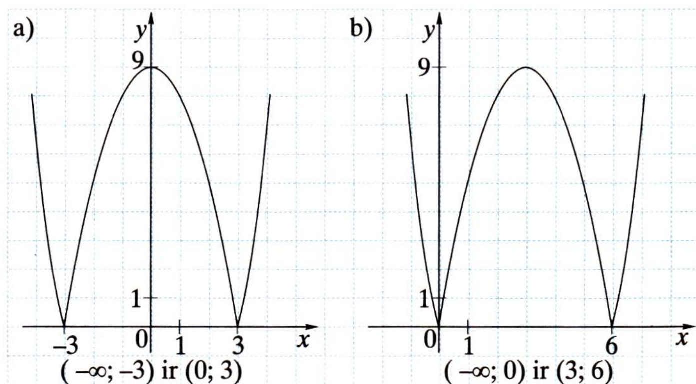
9. B.

10. a) $[-4; -3)$, $(2; 3]$; b) $(-1; 1]$, $[2; 3)$.

11. a) $(-3; 3]$; b) $[7; 10)$.

12. a) $(-2; 7)$, $(1; 4)$; b) $(3; -4)$, $(4; -3)$; c) sprendinių nėra.

13.



14. a) 25 000 Lt; b) 22 500 Lt.

15. a) 10%; b) 20%.

16. a) $\frac{x+1}{x-4}$; b) $\frac{x-1}{x-5}$; c) $\frac{a^2-8}{a^2+3}$; d) $\frac{a^2+9}{a^2-8}$.

17. a) 9 cm, 12 cm, 15 cm; b) 54 cm^2; c) 7,5 cm; d) 3 cm; e) 7,2 cm; f) 7,5 cm.

18. a) 4 : 9; b) 8 : 27.

19. a) 20; b) 12; c) 40; d) 60.

20. 400 g.

5

1. a) 28; b) 56.

2. 20.

3. 720.

4. a) 12 144; b) 276.

5. a) 66; b) 132.

6. $\frac{1}{240}$.

7. a) 336; b) $\frac{1}{336}$.

8. a) 84; b) 10; c) $\frac{5}{42}$.

9. $A_{12}^4 = 11\,880$; $A_{14}^6 = 2\,162\,160$; $C_{20}^5 = 15\,504$; $C_{14}^6 = 3003$; $P_4 = 24$; $P_6 = 720$.

10. a) 0,48; b) 0,08; c) 0,32; d) 0,12.

11. a) $\frac{3}{10}$; b) $\frac{1}{10}$; c) $\frac{1}{5}$; d) $\frac{3}{20}$.

12. a) Taip; $\mathbf{E}X = 8$; b) ne; c) taip; $\mathbf{E}X = 0{,}45$; d) taip; $\mathbf{E}X = 18\frac{1}{3}$.

13. 2,3.

14.

X	0	1	2	3	5	6	7	8
P	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

15. 2,2 Lt.

16. a) $x < -3$, $x > 3$; b) $-4 < x < 4$; c) $-10 \leqslant x \leqslant 10$; d) $x \leqslant -8$, $x \geqslant 8$.

17. a) $x < 0$, $x > 4$; b) $0 < x < 6$; c) $x = 3$; d) $x = 4$;
e) $-2 \leqslant x \leqslant 3$, $x > 7$; f) $x \leqslant 1$, $2 \leqslant x < 3$.

18. a) 10 cm, 15 cm; b) 9 cm, 15 cm.

19. a) Per 6 h; b) po 1,5 h, po 4 h.

20. a) 6; b) $24\sqrt{2}$ cm, $4\sqrt{2}$ cm.

21. a) 1; b) 3.

22. a) $6{,}25\pi\,\text{cm}^2$; b) $60\pi\,\text{cm}^2$; c) $72{,}5\pi\,\text{cm}^2$; d) $75\pi\,\text{cm}^3$.

23. a) $(a+1)(a^2+1)$; b) $(a+1)^2(a-1)$.

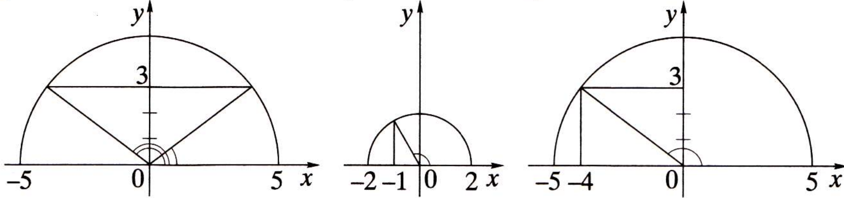
6

1. $\sin E = \frac{GF}{GE}$, $\sin G = \frac{EF}{EG}$. **2.** 2) a) $\approx 24°$; b) $\approx 53°$.
3. $\sin\frac{\pi}{6}$, $\sin 35°$, $\sin\frac{\pi}{4}$, $\sin\frac{\pi}{3}$, $\sin 70°$, $\sin 89°$.
4. a) $\sin 63° > \frac{\sqrt{3}}{2}$; b) $\sin 29° < \frac{3}{5}$.
5. 1) a) $\approx 37°$; b) 4,8; c) 8,64; 2) 2,88.
6. $\cos E = \frac{EF}{EG}$, $\cos G = \frac{GF}{GE}$, $\operatorname{tg} E = \frac{GF}{FE}$, $\operatorname{tg} G = \frac{EF}{FG}$.
7. 2) a) $\approx 53°$; b) $\approx 37°$. **8.** $\cos 80°$, $\cos 62°$, $\cos\frac{\pi}{3}$, $\cos\frac{\pi}{4}$, $\cos\frac{\pi}{6}$, $\cos 29°$.
9. a) $\cos 29° > \frac{\sqrt{3}}{2}$; b) $\cos 63° < \frac{3}{5}$.
10. a) 0,755; b) 0,242; c) 0,675; d) 0,858; e) 0,850; f) 1,711.
11. a) $\sin\alpha$; b) $\cos\alpha$; c) $\cos\alpha - \sin\alpha$; d) 2. **12.** a) 60 cm; b) $12\sqrt{5}$ cm.
13. 2) a) $\approx 32°$; b) $\approx 30°$.
14. a) $\cos\alpha = 0{,}6$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{4}{3}$; b) $\sin\alpha = \frac{3}{5}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{4}$;
c) $\sin\alpha = \frac{5}{13}$, $\cos\alpha = \frac{12}{13}$.
15. 1) $\approx 27°$; 2) $\approx 29°$. **16.** a) $\operatorname{ctg}\alpha$; b) $\sin\alpha$; c) $\sin^2\alpha$.
17. a) $x = \frac{6}{\cos 58°} \approx 11{,}3$; b) $x = \frac{9\sin 32°}{\cos 41°} \approx 6{,}3$; c) $x = 4 + 3\operatorname{tg} 47° \approx$ $\approx 7{,}2$; d) *Nurodymas.* Kadangi $\angle ABC = 180° - 50° - 38° = 92°$, tai trikampis ABC nėra status. Iš kampo A nubrėžkite trikampio aukštinę AD. Trikampis ADB — statusis. Tada $x = \frac{9\sin 38°}{\sin 88°} \approx 5{,}544$.
18. $h = 18{,}5\sin 38° \approx 11{,}4$ m.
19. $AB = \frac{56\sin 68°}{\sin 80°} \approx 52{,}7$ m. *Nurodymas.* Iš kampo A nubrėžkite aukštinę ir nagrinėkite du stačiuosius trikampius.
20. α, kur $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{l}{2d}$; $\alpha \approx 124°$.
21. a) $\angle A = 55°$, $b = 12\operatorname{tg} 35° \approx 8{,}4$, $c = \frac{12}{\cos 35°} \approx 14{,}7$;
b) $\angle A = 15°$, $a = 8\operatorname{tg} 15° \approx 2{,}1$, $c = \sqrt{8^2 + 2{,}1^2} \approx 8{,}3$;
c) $b = \sqrt{33} \approx 5{,}7$, $\sin A = \frac{4}{7}$, $\angle A \approx 35°$, $\angle B \approx 55°$;
d) $\angle B = 48°$, $a = 15\sin 42° \approx 10$; $b = \sqrt{125} \approx 11{,}2$;
e) $c = \sqrt{117} \approx 10{,}8$, $\operatorname{tg} A = \frac{6}{9}$, $\angle A \approx 34°$, $\angle B \approx 56°$.
22. 88°. **23.** 1) 10 cm; 2) 24 cm^2; 3) $\approx 53°$. **24.** 30.
25. 1) $V = \frac{2}{3}b^3\sin\alpha\cos^2\alpha$; 2) ≈ 471 cm^3.
26. a) -3, -2, -1; b) -4, -3, -2, -1, 0.
27. a) $P_n = 3n + 2$; b) 23 kWh, 32 kWh; c) gegužės mėn., gruodžio mėn.; d) 75 kWh, 258 kWh.
28. a) -2, 4; b) 6, 12. **29.** (0; -2), (1,5; 0).
30. Trupmenos reikšmė lygi nuliui, kai: a) $x = 0$; b) $x = -5$.
Trupmena neturi prasmės, kai: a) $x = -3$ ir $x = 3$; b) $x = 0$ ir $x = 5$.
31. a) $2{,}1 \cdot 10^{-5}$; b) $5 \cdot 10^{-3}$. **32.** a) 15 ha; b) per 12 d.

7

1. a) $\cos\alpha = -\frac{3}{5}$, $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{4}{3}$; b) $\sin\alpha = \frac{3}{5}$, $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{3}{4}$; c) $\sin\alpha = \frac{5}{13}$, $\cos\alpha = -\frac{12}{13}$; d) $\sin\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$, $\cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$, $\operatorname{tg}\alpha = -2$.

2. a) b) c)



2) a) $\approx 37^\circ$ arba $\approx 143^\circ$; b) 120°; c) $\approx 143^\circ$.

3. a) 0; b) 0; c) $-\frac{1}{2}$; d) 2; e) 1; f) 0; g) 2.

4. a) $\approx 0{,}927$; b) $\approx -0{,}669$; c) $\approx -0{,}445$.

5. a) $\approx 0{,}988$; b) $\approx 0{,}864$; c) $\approx -0{,}765$; d) $\approx -0{,}967$; e) $\approx -4{,}396$; f) $\approx -0{,}340$.

6. a) Teigiama; b) teigiama; c) neigiama.

7. $\approx 70{,}4\,\text{cm}^2$.

8. a) $\approx 74\,\text{cm}^2$; b) $\approx 9\,\text{cm}$, $\approx 18\,\text{cm}$; c) $\approx 63^\circ$.

9. $a + \frac{d \sin\alpha \sin\beta}{\sin(\alpha-\beta)}$; $\approx 38{,}5\,\text{m}$.

10. $\frac{R^2\sqrt{6}\sin 75^\circ}{2}$.

11. a) $\sqrt{13} \approx 3{,}6$; b) $\sqrt{260} \approx 16{,}1$.

12. a) $\approx 8{,}1$; b) $\approx 14{,}3$; c) $\approx 39{,}7$.

13. a) $c \approx 36{,}6$, $\angle A \approx 34^\circ$, $\angle B \approx 21^\circ$; b) $c \approx 7{,}8$, $\angle A \approx 119^\circ$, $\angle B \approx 41^\circ$; c) $a \approx 15{,}7$, $\angle B \approx 30^\circ$, $\angle C \approx 70^\circ$; d) $c \approx 34{,}2$, $\angle A \approx 15^\circ$, $\angle B \approx 33^\circ$.

14. a) $\angle B = 65^\circ$, $a = \frac{18\sin 20^\circ}{\sin 65^\circ} \approx 6{,}8$, $c = \frac{18 \sin 95^\circ}{\sin 65^\circ} \approx 19{,}8$;
b) $\angle A = 60^\circ$, $b = \frac{25\sin 48^\circ}{\sin 60^\circ} \approx 21{,}4$, $c = \frac{25\sin 72^\circ}{\sin 60^\circ} \approx 27{,}5$;
c) $\angle C = 106^\circ$, $a = \frac{30 \sin 25^\circ}{\sin 106^\circ} \approx 13{,}2$, $b = \frac{30\sin 49^\circ}{\sin 106^\circ} \approx 23{,}6$.

15. a) $\angle A \approx 41^\circ$, $\angle B \approx 54^\circ$, $\angle C \approx 85^\circ$; b) $\angle A \approx 87^\circ$, $\angle B \approx 42^\circ$, $\angle C \approx 51^\circ$; c) $\angle A \approx 25^\circ$, $\angle B \approx 49^\circ$, $\angle C \approx 106^\circ$.

16. a) $\sin A = \frac{18\sin 80^\circ}{25}$, $\angle A \approx 45^\circ$, $\angle B \approx 55^\circ$, $b = \frac{25\sin 55^\circ}{\sin 80^\circ} \approx 20{,}8$; b) $\sin C = \frac{18\sin 74^\circ}{24}$, $\angle C \approx 46^\circ$, $\angle A \approx 60^\circ$, $a = \frac{24\sin 60^\circ}{\sin 74^\circ} \approx 21{,}6$; c) $\sin A = \frac{14\sin 95^\circ}{18}$, $\angle A \approx 51^\circ$, $\angle C \approx 34^\circ$, $c = \frac{18\sin 34^\circ}{\sin 95^\circ} \approx 10{,}1$; d) $\sin C = \frac{12\sin 50^\circ}{10}$, $\angle C_1 \approx 67^\circ$, $\angle C_2 \approx 113^\circ$, $\angle B_1 \approx 63^\circ$, $\angle B_2 \approx 17^\circ$, $b_1 = \frac{12\sin 63^\circ}{\sin 67^\circ} \approx 11{,}6$, $b_2 = \frac{12\sin 17^\circ}{\sin 113^\circ} \approx 3{,}8$.

17. 192π dm^3, 144π dm^2.

18. a) $(2; 4)$; b) $(2; 4)$; c) $[1; 2]$, $(3; +\infty)$; d) $(-\infty; 2]$, $(3; 5)$.

19. a) 25%; b) 20%.

20. a) $(-8{,}5; -6]$; b) $(5; 16]$.

21. a) $\frac{2}{b-a}$; b) $\frac{b}{3}$; c) $\frac{5x}{x-1}$; d) $\frac{y+7}{y^2-1}$.

22. a) 30; b) per 15 d.

23. a) $\frac{5}{6}$; b) $\frac{1}{6}$; c) $\frac{1}{6}$; d) $1\frac{1}{2}$; e) $\frac{13}{36}$; f) $\frac{5}{36}$; g) $3\frac{3}{8}$.

25. a) 0,25 kg; b) 0,54 kg; c) 5 kg, 0,79kg; d) 15,8%; e) 2 kg ir 2 kg.

26. a) 1 h 15 min.; b) 1 h 40 min.

TRIGONOMETRINIŲ FUNKCIJŲ REIKŠMIŲ LENTELĖ

Laipsniai	sin	tg	cos	Laipsniai	sin	tg	cos
0	0,000	0,000	1,000				
1	017	017	1,000	46	0,719	1,036	0,695
2	035	035	0,999	47	731	072	682
3	052	052	999	48	743	111	669
4	070	070	998	49	755	150	656
5	0,087	0,087	0,996	50	0,766	1,192	0,643
6	105	105	995	51	777	235	629
7	122	123	993	52	788	280	616
8	139	141	990	53	799	327	602
9	156	158	988	54	809	376	588
10	0,174	0,176	0,985	55	0,819	1,428	0,574
11	191	194	982	56	829	483	559
12	208	213	978	57	839	540	545
13	225	231	974	58	848	600	530
14	242	249	970	59	857	664	515
15	0,259	0,268	0,966	60	0,866	1,732	0,500
16	276	287	961	61	875	804	485
17	292	306	956	62	883	881	469
18	309	325	951	63	891	1,963	454
19	326	344	946	64	899	2,050	438
20	0,342	0,364	0,940	65	0,906	2,145	0,423
21	358	384	934	66	914	246	407
22	375	404	927	67	921	356	391
23	391	424	921	68	927	475	375
24	407	445	914	69	934	605	358
25	0,423	0,466	0,906	70	0,940	2,747	0,342
26	438	488	899	71	946	2,904	326
27	454	510	891	72	951	3,078	309
28	469	532	883	73	956	271	292
29	485	554	875	74	961	487	276
30	0,500	0,577	0,866	75	0,966	3,732	0,259
31	515	601	857	76	970	4,011	242
32	530	625	848	77	974	4,331	225
33	545	649	839	78	978	4,705	208
34	559	675	829	79	982	5,145	191
35	0,574	0,700	0,819	80	0,985	5,671	0,174
36	588	727	809	81	988	6,314	156
37	602	754	799	82	990	7,115	139
38	616	781	788	83	993	8,144	122
39	629	810	777	84	995	9,514	105
40	0,643	0,839	0,766	85	0,996	11,430	0,087
41	656	869	755	86	998	14,301	070
42	669	900	743	87	999	19,081	052
43	682	933	731	88	999	28,636	032
44	695	966	719	89	1,000	57,290	017
45	0,707	1,000	0,707	90	1,000	∞	0,000

ISBN 9955–491–04–3 (1 dalis)
ISBN 9955–491–05–1 (2 dalys)